Chapitre 8
Chutes verticales

Révision et Résumé

Force de pesanteur La discussion sur le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$ sera menée au chapitre 10. Pour l'instant on se contente de $\vec{P} = m\vec{g}$.

Chute libre vertical Cas théorique, elle correspond à une chute sous le seul effet de la pesanteur. Vous devez savoir qu'elle correspond à un mouvement rectiligne uniformément accéléré :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Vous devez savoir mener la résolution *analytique* de bout en bout, pour aboutir *in fine* à l'équation horaire du mouvement.

Importance des C. I. Vous devez comprendre que toute la physique du problème est contenue d'une part dans l'écriture de la deuxième loi de Newton, d'autre part dans les conditions initiales.

Poussée d'Archimède Pour un corps de masse volumique ρ, déplaçant un volume V_f de fluide de masse volumique ρ_f, la poussée d'Archimède est :

$$\vec{\Pi} = -\rho_f V_f \vec{g}$$

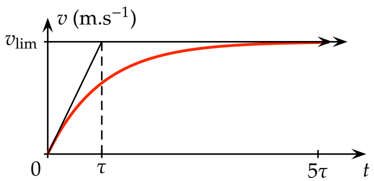
Chute verticale avec frottement Cas pratique, vous devez savoir écrire l'équation différentielle à partir de la deuxième loi de Newton, l'expression de la force de frottement étant donnée. À partir de l'équation différentielle, vous devez savoir en déduire la vitesse limite, telle que :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = v_{\mathrm{lim}}$$

Deux régimes Vous devez savoir que l'on observe deux régimes, un régime initial, puis un régime asymptotique ou permanent, à la vitesse limite.

Exploitation d'un enregistrement Sur un enregistrement $v = f(t)$, vous devez être capable de :

- reconnaître le régime initial (= exponentielle) et le régime permanent (= asymptote horizontale) ;
- évaluer le temps caractéristique pour obtenir le régime permanent (typiquement 5τ avec τ que l'on trouve grâce à la tangente à l'origine de la courbe $v = f(t)$) ;
- déterminer la vitesse limite (= ordonnée de l'asymptote horizontale).



Méthode d'Euler Vous devez savoir appliquer la méthode itérative d'Euler pour résoudre *numériquement* l'équation différentielle.

Vous devez savoir discuter de la pertinence des résultats numériques obtenus, par comparaison avec des résultats expérimentaux (choix du pas de résolution, choix du modèle proposé pour la force de frottement).

Mots clés

Chute libre verticale	**Régime asymptotique**	**Temps caractéristique**
Conditions initiales	**Vitesse limite**	**Méthode d'Euler**

Questions

Q1 **N°1 p. 220** **Q2** **N°4 p. 220** **Q3** **N°9 p. 220**

Q4 On laisse tomber un objet du haut d'une tour. Faites un graphique représentant le module de la vitesse en fonction de la distance parcourue depuis le début de la chute, lorsque la résistance de l'air est (a) négligée, ou (b) prise en compte.

Q5 Un objet lancé à la verticale vers le haut est momentanément au repos lorsqu'il se trouve à sa hauteur maximale. Quelle est son accélération en ce point ?

Q6 Si l'on tient compte de l'effet de la résistance de l'air sur un corps projeté verticalement vers le haut, le temps qu'il met pour s'élever est-il supérieur ou inférieur au temps qu'il met pour tomber ?

Q7 Une méthode simple de mesure de votre temps de réflexe consiste à demander à quelqu'un de laisser tomber une règle entre vos doigts. Quel est le principe de ce test ? (Cette méthode donne une estimation optimiste, car vous êtes prévenu de l'évènement.)

Exercices

N'oubliez pas l'étonnant exercice résolu page 218.

8.1 **N°14 p. 221 : Mongolfière**

8.2 **N°18 p. 221 : Utilisation d'un tableur**

8.3 **N°22 p. 221 : Saut en parachute**

8.4 **N°27 p. 204 : Chute d'une bille dans différents fluides**

Attention, cet exercice est listé dans le chapitre précédent de votre livre.

8.5 **Voyager**

À partir des données envoyées par l'engin spatial *Voyager* en 1979, l'ingénieure Linda Morabito a découvert sur Io, un satellite de Jupiter, le premièr volcan extraterrestre en cours d'éruption. Le panache de l'éruption, constitué de blocs de lave, s'élevait à 280 km d'altitude environ. Sachant que l'accélération due à la gravité à la surface d'Io vaut 1,8 m/s^2, et supposant qu'elle demeure constante jusqu'à la hauteur maximale de la lave, déterminez :

a. la vitesse à laquelle les débris étaient projetés ;
b. le temps qu'il leur fallait pour atteindre la hauteur maximale.

8.6 **Méthode d'Euler**

Une bille de volume V, de masse volumique ρ, a été lâchée sans vitesse initiale dans un liquide de masse volumique ρ'. Elle a un mouvement de chute verticale.

a. Montrer que dans le cas où la force de frottement exercée par le liquide est de la forme :

$$\vec{f} = -k\vec{v},$$

l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = av + b$$

b. Rappeler le principe de la méthode d'Euler.
c. Le tableau de valeurs ci-dessous est un extrait de feuille de calcul d'un tableur correspondant aux valeurs :

$$a = -9{,}0\ \mathrm{s}^{-1} \quad \text{et} \quad b = 10\ \mathrm{m.s}^{-2}$$

t (s)	v (m.s^{-1})
0	0
0,03	0,30
0,06	0,52
0,09	0,68
0,12	0,80

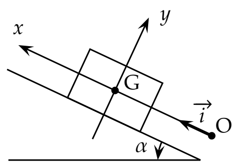
t (s)	v (m.s^{-1})
0,15	0,88
0,18	0,94
0,21	
0,24	
0,27	

Compléter le tableau en calculant les trois dernières valeurs de v par la méthode numérique d'Euler.
d. Représenter graphiquement la fonction $v = f(t)$. En déduire la vitesse limite et le temps caractéristique.

⋆⋆⋆

8.7 **Mouvement sur un plan incliné**

On considère un solide de masse m et de centre d'inertie G, en mouvement sur la droite de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.



Les frottements sont négligés : la force modélisant l'action du plan incliné sur le solide est donc perpendiculaire au plan incliné.

Le solide est lancé vers la partie supérieure du plan incliné selon l'axe $(O ; \vec{i})$, avec une vitesse initiale de valeur v_0. À la date $t = 0$, le centre d'inertie G se trouve en O, son vecteur vitesse est alors égal à $v_0\,\vec{i}$. On étudie le mouvement de G pour $t > 0$.

1. **a.** Faire l'inventaire des forces appliquées au solide. Les représenter sur un schéma.
b. Montrer que la coordonnée a selon $(O ; \vec{i})$ du vecteur accélération de G est égale à $-g \sin\alpha$.
c. Qualifier le mouvement de G.

2. **a.** Donner l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée v du vecteur vitesse G.
b. Exprimer v en fonction de la date t.
c. Mêmes questions pour la coordonnée x de G.

3. **a.** Donner l'expression de la date t_M à laquelle G atteint son point le plus haut.
b. En déduire l'expression de la coordonnée x_M de ce point en fonction de $g \sin\alpha$ et de v_0.

4. L'angle α vaut 10,0°. On souhaite atteindre un point distant de 80,0 cm. Quelle valeur minimale faut-il donner à v_0 ?

Corrigé 8
Chutes verticales

Questions

Q 1 **N°1 p. 220**

Le mouvement d'un solide en chute verticale dans l'eau comporte essentiellement deux phases :

– mouvement rectiligne accéléré, qui correspond à une exponentielle pour $v = f(t)$;
– mouvement rectiligne uniforme, à la vitesse limite, lorsque les forces de frottement fluide et la poussée d'Archimède compensent exactement le poids du corps.

Q 2 **N°4 p. 220**

Le paramètre λ va dépendre de la densité de l'objet, de son maître-couple (= surface perpendiculaire au mouvement de l'objet), et de son profilé (ce qui est appelé Cx par les ingénieurs) — donc, globalement, de sa forme.

Q 3 **N°9 p. 220**

Le système est imposé par l'énoncé, c'est le solide considéré ; le référentiel est supposé terrestre, galiléen ; le bilan des forces est indiqué dans l'énoncé ; la deuxième loi de Newton s'écrit alors :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

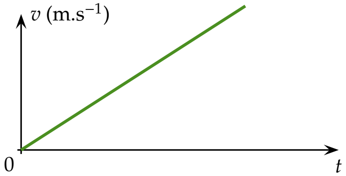
On projete cette relation vectorielle sur un axe (Ox) vertical descendant :

$$mg - \lambda v^2 = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

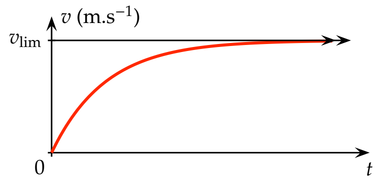
D'où l'équation différentielle demandée :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{m}v^2 = g$$

Q 4 Si on néglige la résistance de l'air :



Si la résistance de l'air est prise en compte :



Q 5 Lorsque la vitesse de l'objet est nulle, les frottements *fluides* (ici frottement de l'air) sont nuls aussi. Les seules forces en présence sont le poids et la poussée d'Archimède. Dans l'hypothèse où l'on néglige cette dernière, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} = m\vec{a} \quad\Rightarrow\quad m\vec{g} = m\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \vec{a} = \vec{g}$$

On obtient ainsi, en ce point particulier d'une chute freinée, la même accélération que pour la chute libre.

Q 6 Tout au long de son mouvement, autant dans la phase de montée que dans la phase de descente, le corps est freiné par la force de frottement. Il perd donc de l'énergie. En conséquence, il ne peut pas repasser au point où on l'a lancé avec la même énergie cinétique E_c : cette dernière sera inférieure. Il en est de même pour sa vitesse v, telle que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Par suite, il va donc mettre plus de temps pour redescendre que pour monter !

Q 7 Le principe consiste à lire la graduation à laquelle on arrive à attraper la règle. Par exemple, si on attrape la règle à 25 cm, cela signifie qu'elle a eut le temps de tomber 25 cm, et que le temps de chute correspondant correspond au temps de réflexe :

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \quad\Leftrightarrow\quad t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,25}{9,8}} = 0,23\text{ s}$$

Exercices

8.1 **N°14 p. 221 : Montgolfière**

8.2 **N°18 p. 221 : Utilisation d'un tableur**

1. Formule pour le calcul de la vitesse moyenne :

$$\vec{v}_i \simeq \frac{\overrightarrow{\mathrm{M}_{i+1}\mathrm{M}_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{M}_{i+1}\mathrm{M}_{i-1}}}{2\Delta t}$$

En langage compréhensible pour l'ordinateur, à taper en `C4` et à recopier vers le bas :

```
=(B5-B3)/(A5-A3)
```

Formule pour le calcul de l'acccélération moyenne :

$$\vec{a}_i \simeq \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{2\Delta t}$$

À taper en `D4` et à recopier vers le bas :

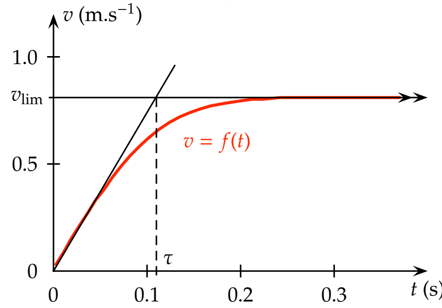
```
=(C5-C3)/(A5-A3)
```

2. La courbe $v = f(t)$ admet une asymptote horizontale pour :

$$v(t \to \infty) \simeq 0,81\text{ m.s}^{-1} \text{ noté } v_{\text{lim}}$$

3. La courbe $v = f(t)$ admet une tangente à l'origine qui coupe l'asymptote horizontale pour :

$$\tau \simeq 0,11\text{ ms}$$



4. Équation de la tangente à l'origine :

$$v = 7,4t$$

Cette tangente à l'origine aurait pour équation $v = gt$ si la poussée d'Archimède était négligeable. La réponse est donc : non, elle n'est pas négligeable, elle compte pour :

$$\frac{9,8 - 7,4}{9,8} \times 100 = 24\,\%$$

8.3 **N°22 p. 221 : Saut en parachute**

1. Si la chute est libre, la seule force qui s'exerce est le poids total : viande + équipement.

2. Le système étudié est Chrichri et son bardage, le tout dans un référentiel terrestre supposé galiléen ; la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projetée sur un axe vertical ascendant :

$$-mg + hv = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

D'où l'équation différentielle demandée :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{h}{m}v = -g$$

La vitesse limite, constante, se caractérise par :

$$v = v_{\text{lim}} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}v_{\text{lim}}}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{h}{m}v_{\text{lim}} = -g$$

$$\Leftrightarrow\quad v_{\text{lim}} = \frac{mg}{h}$$

Application numérique :

$$v_{\text{lim}} = \frac{100 \times 9,8}{10^{-3}} = 9,8 \cdot 10^5\text{ m.s}^{-1}$$

Valeur non réaliste.

3. L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{\lambda}{m}v^2 = -g$$

Et la vitesse limite :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

4. Utilisons la formule précédente :

$$\lambda = \frac{mg}{v_{\text{lim}}^2}$$

Application numérique :

$$\lambda = \frac{100 \times 9,8}{\left(\frac{200 \times 1\,000}{3\,600}\right)^2} = 0,318\text{ u S. I.}$$

8.4 **N°27 p. 204 : Chute d'une bille dans différents fluides**

8.5 **Voyager**

a. On considère que la chute est une chute libre, c'est-à-dire sans frottements. Avec (Oz) un axe vertical descendant, d'origine O confondu avec le point d'éruption :

$$v(t) = gt - v_0 \quad\text{et}\quad z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - v_0t$$

Le signe moins devant v_0 indique que la vitesse initiale est orientée vers le haut, en sens inverse de l'axe (Oz).

Au sommet S de la trajectoire, atteint au temps $t = t_S$, la vitesse est nulle :

$$v(t_S) = 0 \quad\Rightarrow\quad gt_S - v_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow\quad v_0 = gt_S$$

Pour déterminer le temps t_S, on utilise l'équation horaire $z(t)$ du mouvement. Au sommet S de la trajectoire, l'altitude vaut 280 km, donc :

$$\begin{cases} z(t_S) = -280\,000\text{m} \\ z(t_S) = \frac{1}{2}gt_S^2 - v_0t_S \end{cases}$$

En remplaçant v_0 par l'expression trouvée ci-dessus :

$$z(t_S) = \frac{1}{2}gt_S^2 - gt_S^2 = -\frac{1}{2}gt_S^2$$

L'axe (Oz) étant orienté vers le bas, le signe moins est normal pour la coordonnée du sommet S.

$$-280\,000 = -0,9t_S^2 \quad\Rightarrow\quad t_S = \sqrt{\frac{280\,000}{0,9}} = 558\text{ s}$$

On en déduit la vitesse initiale recherchée :

$$v_0 = gt_S = 1,8 \times 558 \simeq 1\,000\text{ m.s}^{-1}$$

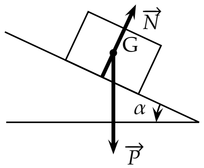
8.6 **Méthode d'Euler**

8.7 **Mouvement sur un plan incliné**

1. a. Inventaire des forces :

– poids $\vec{P}$, verticale, vers la bas, appliqué au centre d'inertie G du système, valeur $P = mg$;

– réaction normale du support $\overrightarrow{N}$, perpendiculaire au support, vers le haut, appliquée au centre de la surface de contact.



b. Dans un référentiel supposé galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} = m\overrightarrow{a}$$

On projette cette relation sur le système d'axe (Oxy), l'accélération selon (Oy) étant nulle puisque le mouvement s'effectue uniquement selon (Ox) :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha \ + \ 0 = ma \\ -mg\cos\alpha + N = 0 \end{cases}$$

Après simplification par m, on trouve effectivement : $a = -g\sin\alpha$

c. G a un mouvement rectiligne uniformément décéléré puis accéléré, puisque la valeur de l'accélération est égale à une constante.

2. a. La projection de la deuxième loi de Newton sur l'axe (Ox) s'écrit :

$$-mg\sin\alpha = ma$$

Avec $a = \frac{dv}{dt}$, l'équation différentielle recherchée est :

$$\frac{dv}{dt} = -g\sin\alpha$$

b. On intègre cette équation différentielle :

$$v(t) = -g\sin\alpha\, t + k$$

On détermine la constante d'intégration k avec la condition initiale :

$$v(t=0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad k = v_0$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = -g\sin\alpha\, t + v_0$$

c. On intègre une seconde fois :

$$x(t) = -\frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 + v_0 t + q$$

On détermine la constante d'intégration q avec la condition initiale :

$$x(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -\frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 + v_0 t$$

3. a. Lorsque le mobile atteint son point le plus haut, il s'immobilise, prémise à sa chute immuable. Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} v(t_M) = 0 \\ v(t_M) = -g\sin\alpha\, t_M + v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \ t_M = \frac{v_0}{g\sin\alpha}$$

b. On remplace t_M par sa valeur dans l'équation horaire du mouvement, en notant $x_M = x(t_M)$:

$$x_M = -\frac{1}{2}g\sin\alpha\, t_M^2 + v_0 t_M$$

$$\Rightarrow \quad x_M = -\frac{1}{2}g\sin\alpha\,\frac{v_0^2}{g^2\sin^2\alpha} + v_0\frac{v_0}{g\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad x_M = +\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}$$

Vu la complexité de la formule, une étude dimensionnelle s'impose :

$$\left[\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}\right] = \frac{m^2.s^{-2}}{m.s^{-2}} = m \quad \Rightarrow \quad \text{conforme.}$$

4. Utilisons la formule précédente :

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2g\sin\alpha\, x_M}$$

Application numérique :

$$v_0 = \sqrt{2\times 9,8\times\sin(10^o)\times 0,800} = 1,65 \text{ m.s}^{-1}$$

⋆⋆
⋆