

Chapitre 8

Chutes verticales

RÉVISION ET RÉSUMÉ

Force de pesanteur La discussion sur le champ de pesanteur terrestre \vec{g} sera menée au chapitre 10. Pour l'instant on se contente de $\vec{P} = m\vec{g}$.

Chute libre verticale Cas théorique, elle correspond à une chute sous le seul effet de la pesanteur. Vous devez savoir qu'elle correspond à un mouvement rectiligne uniformément accéléré :

$$\vec{a} = \vec{g}$$

Vous devez savoir mener la résolution *analytique* de bout en bout, pour aboutir *in fine* à l'équation horaire du mouvement après double intégration.

Importance des C. I. Vous devez comprendre que toute la physique du problème est contenue d'une part dans l'écriture de la deuxième loi de Newton (équation différentielle du second ordre), d'autre part dans les conditions initiales (position & vitesse).

Poussée d'Archimède Pour un corps de masse volumique ρ , déplaçant un volume V_{fluide} de fluide de masse volumique ρ_{fluide} , la poussée d'Archimède est :

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{fluide}} \vec{g}$$

Frottements fluide Les forces de frottement fluides sont décrites par une loi *phénoménologique*, les deux cas les plus simples étant une dépendance linéaire ou quadratique avec la vitesse v :

$$\vec{f} = -k\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{f} = -kv\vec{v}$$

Dans tous les cas, la force de frottement est tangente et opposée au mouvement.

Chute verticale avec frottement Cas pratique, vous devez savoir écrire l'équation différentielle à partir de la deuxième loi de Newton, l'expression

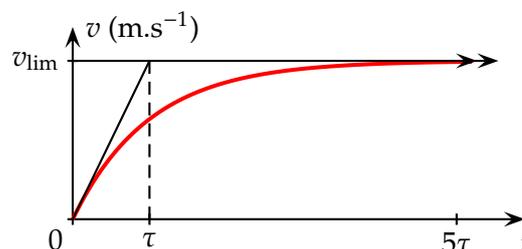
de la force de frottement étant donnée. À partir de l'équation différentielle, vous devez savoir en déduire la vitesse limite, telle que :

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = v_{\text{lim}}$$

Deux régimes Vous devez savoir que l'on observe deux régimes, un régime initial, puis un régime asymptotique ou permanent, à la vitesse limite.

Exploitation d'un enregistrement Sur un enregistrement $v = f(t)$, vous devez être capable de :

- reconnaître le régime initial (= exponentielle) et le régime permanent (= asymptote horizontale) ;
- évaluer le temps caractéristique pour obtenir le régime permanent (typiquement 5τ avec τ que l'on trouve grâce à la tangente à l'origine de la courbe $v = f(t)$) ;
- déterminer la vitesse limite (= ordonnée de l'asymptote horizontale).



Méthode d'Euler Vous devez savoir appliquer la méthode itérative d'Euler pour résoudre *numériquement* l'équation différentielle.

Vous devez savoir discuter de la pertinence des résultats numériques obtenus, par comparaison avec des résultats expérimentaux (choix du pas de résolution, choix du modèle proposé pour la force de frottement).

EXERCICES

N'oubliez pas l'étonnant exercice résolu page 218.

8.1 À bâtons rompus

a. On laisse tomber un objet du haut d'une tour. Faites un graphique représentant le module de la vitesse en fonction de la distance parcourue depuis le début de la chute, lorsque la résistance de l'air est (a) négligée, ou (b) prise en compte.

- b. Un objet lancé à la verticale vers le haut est momentanément au repos lorsqu'il se trouve à sa hauteur maximale. Quelle est son accélération en ce point ?
- c. Si l'on tient compte de l'effet de la résistance de l'air sur un corps projeté verticalement vers le haut, le temps qu'il met pour s'élever est-il supérieur ou

inférieur au temps qu'il met pour tomber ?

- d. Une méthode simple de mesure de votre temps de réflexe consiste à demander à quelqu'un de laisser tomber une règle entre vos doigts. Quel est le principe de ce test ? (Cette méthode donne une estimation optimiste, car vous êtes prévenu de l'évènement.)
- e. À partir des formules obtenues pour la chute libre, trouvez la relation liant la vitesse et la hauteur de chute. Calculer la vitesse atteinte en 1 m de chute (quand on tombe de sa chaise), 1,8 m (quand on tombe de sa hauteur, tête première c'est plus marquant) et 2,6 m (chute depuis le premier étage, je vous déconseille la vérification expérimentale). Conclure en comparant avec les temps de réflexe (1/2 seconde). À partir de quelle valeur de l'intensité de la pesanteur serions-nous obligés de garder en permanence un casque sur la tête ?
- f. À partir des obtenues pour la chute libre, trouvez les temps et les hauteurs de chute correspondant aux limites de vitesse du code de la route.

8.2 N°14 p. 221 : Mongolfière

8.3 N°18 p. 221 : Utilisation d'un tableur

8.4 N°22 p. 221 : Saut en parachute

8.5 N°27 p. 204 : Chute d'une bille dans différents fluides

Attention, cet exercice est listé dans le chapitre précédent de votre livre.

8.6 Voyager

À partir des données envoyées par l'engin spatial *Voyager* en 1979, l'ingénieure Linda Morabito a découvert sur Io, un satellite de Jupiter, le premier volcan extraterrestre en cours d'éruption. Le panache de l'éruption, constitué de blocs de lave, s'élevait à 280 km d'altitude environ. Sachant que l'accélération due à la gravité à la surface d'Io vaut $1,8 \text{ m/s}^2$, et supposant qu'elle demeure constante jusqu'à la hauteur maximale de la lave, déterminez :

- la vitesse à laquelle les débris étaient projetés ;
- le temps qu'il leur fallait pour atteindre la hauteur maximale.

8.7 Méthode d'Euler

Une bille de volume V , de masse volumique ρ , a été lâchée sans vitesse initiale dans un liquide de masse volumique ρ' . Elle a un mouvement de chute verticale.

- a. Montrer que dans le cas où la force de frottement exercée par le liquide est de la forme :

$$\vec{f} = -k\vec{v},$$

l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dv}{dt} = av + b$$

- b. Rappeler le principe de la méthode d'Euler.
- c. Le tableau de valeurs ci-dessous est un extrait de feuille de calcul d'un tableur correspondant aux valeurs :

$$a = -9,0 \text{ s}^{-1} \quad \text{et} \quad b = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

t (s)	v (m.s ⁻¹)
0	0
0,03	0,30
0,06	0,52
0,09	0,68
0,12	0,80

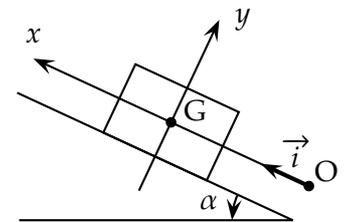
t (s)	v (m.s ⁻¹)
0,15	0,88
0,18	0,94
0,21	
0,24	
0,27	

Compléter le tableau en calculant les trois dernières valeurs de v par la méthode numérique d'Euler.

- d. Représenter graphiquement la fonction $v = f(t)$. En déduire la vitesse limite et le temps caractéristique.

8.8 Mouvement sur un plan incliné

On considère un solide de masse m et de centre d'inertie G , en mouvement sur la droite de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.



Les frottements sont négligés : la force modélisant l'action du plan incliné sur le solide est donc perpendiculaire au plan incliné.

Le solide est lancé vers la partie supérieure du plan incliné selon l'axe $(O; \vec{i})$, avec une vitesse initiale de valeur v_0 . À la date $t = 0$, le centre d'inertie G se trouve en O , son vecteur vitesse est alors égal à $v_0 \vec{i}$. On étudie le mouvement de G pour $t > 0$.

- a. Faire l'inventaire des forces appliquées au solide. Les représenter sur un schéma.

b. Montrer que la coordonnée a selon $(O; \vec{i})$ du vecteur accélération de G est égale à $-g \sin \alpha$.

c. Qualifier le mouvement de G .
- a. Donner l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée v du vecteur vitesse G .

b. Exprimer v en fonction de la date t .

c. Mêmes questions pour la coordonnée x de G .
- a. Donner l'expression de la date t_M à laquelle G atteint son point le plus haut.

b. En déduire l'expression de la coordonnée x_M de ce point en fonction de $g \sin \alpha$ et de v_0 .
- L'angle α vaut $10,0^\circ$. On souhaite atteindre un point distant de 80,0 cm. Quelle valeur minimale faut-il donner à v_0 ?

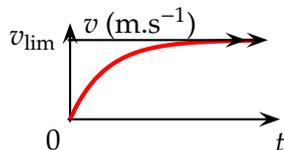
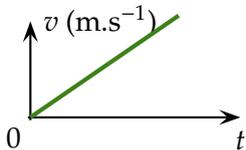
Corrigé 8

Chutes verticales

EXERCICES

8.1 À bâtons rompus

- a. Si on néglige la résistance de l'air : Si la résistance de l'air est prise en compte :



- b. Lorsque la vitesse de l'objet est nulle, les frottements fluides (ici frottement de l'air) sont nuls aussi. Les seules forces en présence sont le poids et la poussée d'Archimède. Dans l'hypothèse où l'on néglige cette dernière, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

On obtient ainsi, en ce point particulier d'une chute freinée, la même accélération que pour la chute libre.

- c. Tout au long de son mouvement, autant dans la phase de montée que dans la phase de descente, le corps est freiné par la force de frottement. Il perd donc de l'énergie. En conséquence, il ne peut pas repasser au point où on l'a lancé avec la même énergie cinétique E_c : cette dernière sera inférieure. Il en est de même pour sa vitesse v , telle que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Par suite, il va donc mettre plus de temps pour redescendre que pour monter !
- d. Le principe consiste à lire la graduation à laquelle on arrive à attraper la règle. Par exemple, si on attrape la règle à 25 cm, cela signifie qu'elle a eut le temps de tomber 25 cm, et que le temps de chute correspondant correspond au temps de réflexe :

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,25}{9,8}} = 0,23 \text{ s}$$

8.2 N°14 p. 221 : Montgolfière

8.3 N°18 p. 221 : Utilisation d'un tableau

1. Formule pour le calcul de la vitesse moyenne :

$$\vec{v}_i \approx \frac{\vec{M}_{i+1} - \vec{M}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\vec{M}_{i+1} - \vec{M}_{i-1}}{2\Delta t}$$

En langage compréhensible pour l'ordinateur, à taper en C4 et à recopier vers le bas :

$$=(B5-B3)/(A5-A3)$$

Formule pour le calcul de l'accélération moyenne :

$$\vec{a}_i \approx \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{2\Delta t}$$

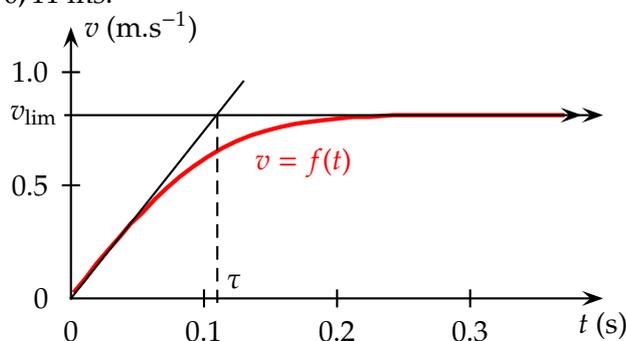
À taper en D4 et à recopier vers le bas :

$$=(C5-C3)/(A5-A3)$$

2. La courbe $v = f(t)$ admet une asymptote horizontale pour :

$$v(t \rightarrow \infty) \approx 0,81 \text{ m.s}^{-1} \text{ noté } v_{\text{lim}}$$

3. La courbe $v = f(t)$ admet une tangente à l'origine qui coupe l'asymptote horizontale pour $\tau \approx 0,11 \text{ ms}$.



4. Équation de la tangente à l'origine : $v = 7,4 \cdot t$
 Cette tangente à l'origine aurait pour équation $v = gt$ si la poussée d'Archimède était négligeable. La réponse est donc : non, elle n'est pas négligeable, elle compte pour :

$$\frac{9,8 - 7,4}{9,8} \times 100 = 24 \%$$

8.4 N°22 p. 221 : Saut en parachute

1. Si la chute est libre, la seule force qui s'exerce est le poids total : viande + équipement.
 2. Le système étudié est Chrichri et son bardage, le tout dans un référentiel terrestre supposé galiléen ; la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projetée sur un axe vertical ascendant :

$$-mg + hv = ma = m \frac{dv}{dt}$$

D'où l'équation différentielle demandée :

$$\frac{dv}{dt} - \frac{h}{m}v = -g$$

La vitesse limite, constante, se caractérise par :

$$v = v_{\text{lim}} \Rightarrow \frac{dv_{\text{lim}}}{dt} = 0 \Rightarrow -\frac{h}{m}v_{\text{lim}} = -g$$

$$\Leftrightarrow v_{\text{lim}} = \frac{mg}{h}$$

Application numérique :

$$v_{\text{lim}} = \frac{100 \times 9,8}{10^{-3}} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

Valeur non réaliste.

3. L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} - \frac{\lambda}{m}v^2 = -g$$

Et la vitesse limite :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

4. Utilisons la formule précédente :

$$\lambda = \frac{mg}{v_{\text{lim}}^2}$$

Application numérique :

$$\lambda = \frac{100 \times 9,8}{\left(\frac{200 \times 1000}{3600}\right)^2} = 0,318 \text{ u S. I.}$$

8.5 N°27 p. 204 : Chute dans différents fluides

8.6 Voyager

a. On considère que la chute est une chute libre, c'est-à-dire sans frottements. Avec (Oz) un axe vertical descendant, d'origine O confondu avec le point d'éruption :

$$v(t) = gt - v_0 \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - v_0t$$

Le signe moins devant v_0 indique que la vitesse initiale est orientée vers le haut, en sens inverse de l'axe (Oz).

Au sommet S de la trajectoire, atteint au temps $t = t_S$, la vitesse est nulle :

$$v(t_S) = 0 \Rightarrow gt_S - v_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow v_0 = gt_S$$

Pour déterminer le temps t_S , on utilise l'équation horaire $z(t)$ du mouvement. Au sommet S de la trajectoire, l'altitude vaut 280 km, donc :

$$\begin{cases} z(t_S) = -280\,000 \text{ m} \\ z(t_S) = \frac{1}{2}gt_S^2 - v_0t_S \end{cases}$$

En remplaçant v_0 par l'expression trouvée ci-dessus :

$$z(t_S) = \frac{1}{2}gt_S^2 - gt_S^2 = -\frac{1}{2}gt_S^2$$

L'axe (Oz) étant orienté vers le bas, le signe moins est normal pour la coordonnée du sommet S.

$$-280\,000 = -\frac{1}{2}gt_S^2 \Rightarrow t_S = \sqrt{\frac{2 \times 280\,000}{9,8}} = 558 \text{ s}$$

On en déduit la vitesse initiale recherchée :

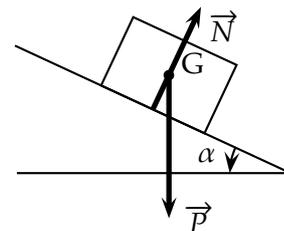
$$v_0 = gt_S = 9,8 \times 558 \approx 5468 \text{ m.s}^{-1}$$

8.7 Méthode d'Euler

8.8 Mouvement sur un plan incliné

1. a. Inventaire des forces :

- poids \vec{P} , verticale, vers le bas, appliqué au centre d'inertie G du système, valeur $P = mg$;
- réaction normale du support \vec{N} , perpendiculaire au support, vers le haut, appliquée au centre de la surface de contact.



b. Dans un référentiel supposé galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

On projette cette relation sur le système d'axe (Oxy), l'accélération selon (Oy) étant nulle puisque le mouvement s'effectue uniquement selon (Ox) :

$$\begin{cases} -mg \sin \alpha + 0 = ma \\ -mg \cos \alpha + N = 0 \end{cases}$$

Après simplification par m , on trouve effectivement : $a = -g \sin \alpha$

c. G a un mouvement rectiligne uniformément décéléré puis accéléré, puisque la valeur de l'accélération est égale à une constante.

2. a. La projection de la deuxième loi de Newton sur l'axe (Ox) s'écrit :

$$-mg \sin \alpha = ma$$

Avec $a = \frac{dv}{dt}$, l'équation différentielle recherchée est :

$$\frac{dv}{dt} = -g \sin \alpha$$

b. On intègre cette équation différentielle :

$$v(t) = -g \sin \alpha t + k$$

On détermine la constante d'intégration k avec la condition initiale :

$$v(t=0) = v_0 \Rightarrow k = v_0$$

$$\Rightarrow v(t) = -g \sin \alpha t + v_0$$

c. On intègre une seconde fois :

$$x(t) = -\frac{1}{2}g \sin \alpha t^2 + v_0 t + q$$

On détermine la constante d'intégration q avec la condition initiale :

$$x(t=0) = 0 \Rightarrow q = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}g \sin \alpha t^2 + v_0 t$$

3. a. Lorsque le mobile atteint son point le plus haut, il s'immobilise, prémise à sa chute immuable. Ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} v(t_M) = 0 \\ v(t_M) = -g \sin \alpha t_M + v_0 \end{array} \right\} \Rightarrow t_M = \frac{v_0}{g \sin \alpha}$$

b. On remplace t_M par sa valeur dans l'équation horaire du mouvement, en notant $x_M = x(t_M)$:

$$x_M = -\frac{1}{2}g \sin \alpha t_M^2 + v_0 t_M$$

$$\Rightarrow x_M = -\frac{1}{2}g \sin \alpha \frac{v_0^2}{g^2 \sin^2 \alpha} + v_0 \frac{v_0}{g \sin \alpha}$$

$$\Rightarrow x_M = +\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g \sin \alpha}$$

Vu la complexité de la formule, une étude dimensionnelle s'impose :

$$\left[\frac{v_0^2}{g \sin \alpha} \right] = \frac{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{m} \Rightarrow \text{conforme.}$$

4. Utilisons la formule précédente :

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2g \sin \alpha x_M}$$

Application numérique :

$$v_0 = \sqrt{2 \times 9,8 \times \sin(10^\circ) \times 0,800} = 1,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

★★
★