DS n°7
Chute d'une balle de tennis de table

L'étude expérimentale de la chute sans vitesse initiale d'une balle de tennis de table (« pig-pong ») a fourni les résultats suivants :

- Masse de la balle : $m = 2,50 \pm 0,05$ g ;
- Diamètre : $D = 3,8$ cm ;
- Vitesse limite de chute : $v_{\text{lim}} = 7,12$ m.s^{-1}.

1. La masse volumique ρ de l'air est égale à $1,3$ kg.m^{-3}. Montrez que la poussée d'Archimède s'exerçant sur la balle peut être négligée par rapport à une autre force en présence. Comme à chaque fois qu'il est question de forces, on ne manquera pas de préciser leurs quatre caractéristiques.

2. On propose d'exprimer par $F = Kv^2$ la valeur de la force de frottement exercée par l'air.

a. Dressez un schéma sommaire représentant les forces appliquées à la balle au cours de la chute.

b. Établissez l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$, coordonnée verticale du vecteur vitesse du centre d'inertie G.

3. On se propose de vérifier que $K = 4,84 \times 10^{-4}$ unités du système international (si vous bloquez sur ces questions, vous pouvez passer directement au **4** ou au **5**, puisque je vous donne la valeur de K).

a. Exprimez K en fonction de mg et de v_{lim}.

b. Vérifiez par le calcul la valeur de K, et précisez son unité.

4. On s'intéresse maintenant à la valeur du temps caractéristique τ. Pour cela, on trace la courbe de la vitesse v en fonction du temps t, ci-dessous.

a. Quelle est la valeur de la pente de la tangente à la courbe $v = f(t)$ à l'origine ? Répondez à cette question par une formule littérale et par un résultat numérique accompagné de son unité, en notant a_0 la valeur de cette pente.
Tracez la tangente précédente sur le schéma ci-dessus. L'énoncé sera joint à votre copie.

b. Complétez le schéma pour faire apparaître le temps caractéristique τ.

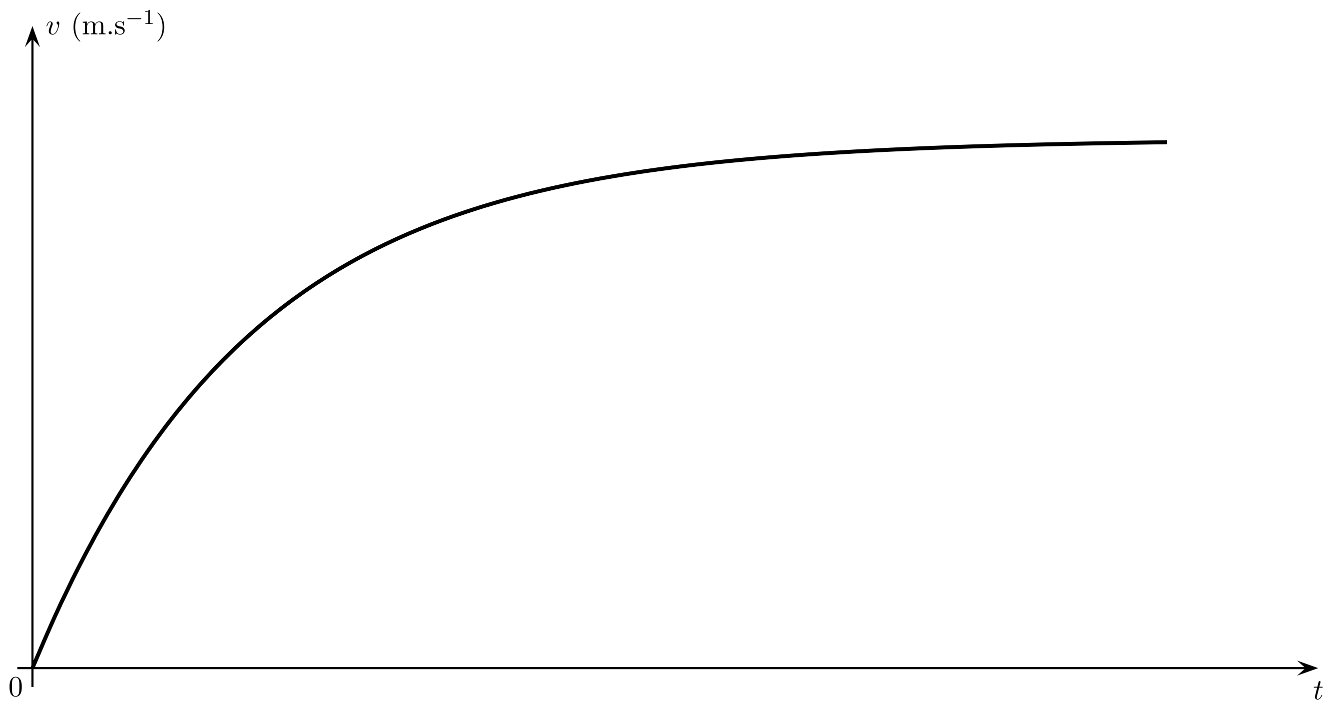
c. Donnez l'expression littérale puis calculez la valeur de τ.

5. L'enregistrement du mouvement a permis de déterminer la vitesse $v_1 = 4,25$ m.s^{-1} à la date $t_1 = 0,500$ s.

a. Calculez la valeur a_1 de l'accélération de la balle à la date t_1.

b. Par la méthode d'Euler, calculez la valeur de la vitesse de la balle à la date $t_2 = 0,510$ s.

Donnée : $g = 9,81$ m.s^{-2}.



⋆⋆⋆

Corrigé DS n°7
Chute d'une balle de tennis de table

1. Masse d'air déplacée :

$$m_{\text{air}} = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{D}{2}\right)^3$$

Application numérique :

$$m_{\text{air}} = \frac{4\pi}{3} \times 1,3 \times \left(\frac{3,8 \times 10^{-2}}{2}\right)^2 = 3,7 \times 10^{-5} \text{ kg}$$

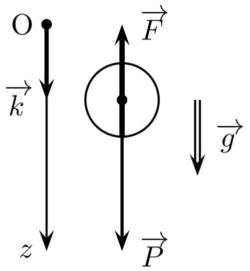
c'est-à-dire 0,037 g, valeur inférieure à la précision de la balance de 0,05 g, donc négligeable devant la masse de la balle.

Poids $\overrightarrow{P}$:
– direction : verticale ;
– sens : vers le bas ;
– point d'application : centre d'inertie G ;
– valeur : $P = mg$;

Poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}$:
– direction : verticale ;
– sens : vers le haut ;
– point d'application : centre d'inertie G ;
– valeur : $\Pi = m_{\text{air}}g$;

On constate que $m_{\text{air}} \ll m$ implique $\Pi \ll P$, c'est-à-dire que la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids de la balle.

2. a.



b. Système : balle de ping-pong ;
Référentiel supposé galiléen, repère d'axe (Oz) vertical descendant ;
Bilan des forces :
– poids $\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{g} = mg\,\overrightarrow{k}$;
– force de frottement opposée au mouvement $\overrightarrow{F} = -Kv^2\,\overrightarrow{k}$.

Éléments cinématiques : $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{k}$

Deuxième loi de Newton :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}$$

En projection sur $\overrightarrow{k}$:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - Kv^2$$

3. a. Lorsque $v \to v_{\text{lim}}$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \to 0$ et l'équation différentielle s'écrit :

$$0 = mg - Kv_{\text{lim}}^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{mg}{v_{\text{lim}}^2}$$

b. Unité de K :

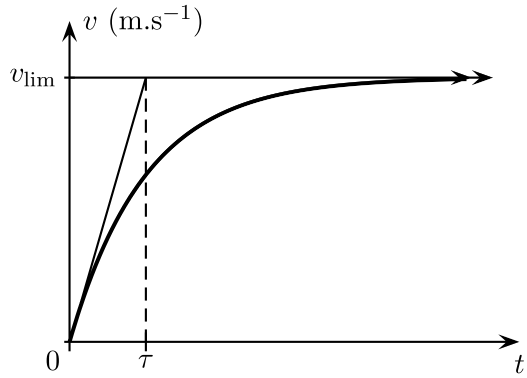
$$[K] = \frac{\text{kg} \times \text{m} \times \text{s}^{-2}}{\text{m}^2 \times \text{s}^{-2}} = \text{kg.m}^{-1}$$

Application numérique :

$$K = \frac{2,50 \times 10^{-3} \times 9,81}{(7,12)^2} = 4,84 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1}$$

4. a. La pente de la courbe $v = f(t)$ est la valeur de sa dérivée temporelle $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Cette dernière est donnée par l'équation différentielle. À l'origine, la balle étant lâchée sans vitesse initiale, $v = 0$ et par suite :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$



b. τ est l'abscisse du point d'intersection entre la tangente à l'origine d'équation $v = a_0 t$ et l'asymptote horizontale $v = v_{\text{lim}}$. Donc :

$$v_{\text{lim}} = a_0\tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{v_{\text{lim}}}{a_0}$$

Application numérique :

$$\tau = \frac{7,12}{9,81} = 0,726 \text{ s}$$

5. a. On utilise l'équation différentielle :

$$ma_1 = mg - Kv_1^2 \quad \Rightarrow \quad a_1 = g - \frac{K}{m}v_1^2$$

Application numérique :

$$a_1 = 9,81 - \frac{4,84 \times 10^{-4}}{2,50 \times 10^{-3}} \times 4,25^2 = 6,31 \text{ m.s}^{-2}$$

b. $v_2 = v_1 + \Delta v_1$ avec :

$$\Delta v_1 = \left(g - \frac{K}{m}v_1^2\right)\Delta t = a_1\Delta t$$

De plus $t_2 = t_1 + \Delta t$ donc $\Delta t = t_2 - t_1 = 0,010$ s.
Finalement :

$$v_2 = 4,25 + 6,31 \times 0,010 = 4,31 \text{ m.s}^{-1}$$

Grille DS n°7

- ❑ Calcul $m_{\text{air}} = 37\ \mu$g ou Π
- ❑ Comparaison avec m ou P
- ❑ Schéma + points d'application
- ❑ Schéma + points d'application
- ❑ Forces $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{F}$ + 4 caractéristiques
- ❑ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{K}{m}v^2$, démontrée
- ❑ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{K}{m}v^2$, démontrée
- ❑ $K = mg/v_{\text{lim}}^2$
- ❑ K en kg.m^{-1}
- ❑ $a_0 = g$, justifié
- ❑ $a_0 = 9,81$ m.s^{-2}
- ❑ Tracé tangente
- ❑ Tracé asymptote horizontale
- ❑ Tracé τ
- ❑ $\tau = v_{\text{lim}}/a_0$, démontrée
- ❑ $\tau = 0,726$ s
- ❑ Équa diff : $a_1 = g - \frac{K}{m}v_1^2$ ou équivalent
- ❑ $a_1 = 6,31$ m.s^{-2}
- ❑ Euler : $v_2 = v_1 + \Delta v_1$ et $\Delta v_1 = a_1 \Delta t$
- ❑ $v_2 = 4,31$ m.s^{-2}

Note **.../20**

Grille DS n°7

- ❑ Calcul $m_{\text{air}} = 37\ \mu$g ou Π
- ❑ Comparaison avec m ou P
- ❑ Schéma + points d'application
- ❑ Schéma + points d'application
- ❑ Forces $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{F}$ + 4 caractéristiques
- ❑ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{K}{m}v^2$, démontrée
- ❑ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{K}{m}v^2$, démontrée
- ❑ $K = mg/v_{\text{lim}}^2$
- ❑ K en kg.m^{-1}
- ❑ $a_0 = g$, justifié
- ❑ $a_0 = 9,81$ m.s^{-2}
- ❑ Tracé tangente
- ❑ Tracé asymptote horizontale
- ❑ Tracé τ
- ❑ $\tau = v_{\text{lim}}/a_0$, démontrée
- ❑ $\tau = 0,726$ s
- ❑ Équa diff : $a_1 = g - \frac{K}{m}v_1^2$ ou équivalent
- ❑ $a_1 = 6,31$ m.s^{-2}
- ❑ Euler : $v_2 = v_1 + \Delta v_1$ et $\Delta v_1 = a_1 \Delta t$
- ❑ $v_2 = 4,31$ m.s^{-2}

Note **.../20**

Grille DS n°7

- ❑ Calcul $m_{\text{air}} = 37\ \mu$g ou Π
- ❑ Comparaison avec m ou P
- ❑ Schéma + points d'application
- ❑ Schéma + points d'application
- ❑ Forces $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{F}$ + 4 caractéristiques
- ❑ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{K}{m}v^2$, démontrée
- ❑ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{K}{m}v^2$, démontrée
- ❑ $K = mg/v_{\text{lim}}^2$
- ❑ K en kg.m^{-1}
- ❑ $a_0 = g$, justifié
- ❑ $a_0 = 9,81$ m.s^{-2}
- ❑ Tracé tangente
- ❑ Tracé asymptote horizontale
- ❑ Tracé τ
- ❑ $\tau = v_{\text{lim}}/a_0$, démontrée
- ❑ $\tau = 0,726$ s
- ❑ Équa diff : $a_1 = g - \frac{K}{m}v_1^2$ ou équivalent
- ❑ $a_1 = 6,31$ m.s^{-2}
- ❑ Euler : $v_2 = v_1 + \Delta v_1$ et $\Delta v_1 = a_1 \Delta t$
- ❑ $v_2 = 4,31$ m.s^{-2}

Note **.../20**

Grille DS n°7

- ❑ Calcul $m_{\text{air}} = 37\ \mu$g ou Π
- ❑ Comparaison avec m ou P
- ❑ Schéma + points d'application
- ❑ Schéma + points d'application
- ❑ Forces $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{F}$ + 4 caractéristiques
- ❑ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{K}{m}v^2$, démontrée
- ❑ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{K}{m}v^2$, démontrée
- ❑ $K = mg/v_{\text{lim}}^2$
- ❑ K en kg.m^{-1}
- ❑ $a_0 = g$, justifié
- ❑ $a_0 = 9,81$ m.s^{-2}
- ❑ Tracé tangente
- ❑ Tracé asymptote horizontale
- ❑ Tracé τ
- ❑ $\tau = v_{\text{lim}}/a_0$, démontrée
- ❑ $\tau = 0,726$ s
- ❑ Équa diff : $a_1 = g - \frac{K}{m}v_1^2$ ou équivalent
- ❑ $a_1 = 6,31$ m.s^{-2}
- ❑ Euler : $v_2 = v_1 + \Delta v_1$ et $\Delta v_1 = a_1 \Delta t$
- ❑ $v_2 = 4,31$ m.s^{-2}

Note **.../20**