

# DS supplémentaire n°1 (2010)

## L'ECHOGRAPHIE : COMMENT ÇA « MARCHE » ?

En médecine, l'échographie est un examen courant, indolore et non dangereux permettant l'observation « directe » d'organes internes. La technique de l'échographie utilise des ondes ultrasonores produites par une sonde jouant le rôle d'émetteur et de récepteur. Les fréquences utilisées dépendent des organes ou des tissus biologiques à sonder (2 MHz à 15 MHz).

Pour obtenir une image par échographie on exploite entre autres, les propriétés suivantes des ondes ultrasonores :

- la célérité et l'absorption de l'onde ultrasonore dépendent du milieu traversé
- lorsqu'elle change de milieu, une partie de l'onde incidente est réfléchi, l'autre est transmise (elle continue son chemin). On dit qu'il y a réflexion partielle lorsqu'il y a changement de milieu aux interfaces tissulaires.

Connaissant les temps de retour des échos, leurs amplitudes et leurs célérités, on en déduit des informations sur la nature et l'épaisseur des tissus traversés. Un ordinateur compile toutes les informations et fournit des images de synthèse des organes sondés.

L'objectif de cet exercice est, après l'étude de quelques propriétés des ondes ultrasonores, d'illustrer le principe de l'échographie linéaire unidimensionnelle par la mesure de l'épaisseur d'un obstacle.

**Les parties 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.**

### 1. Les ondes ultrasonores

1.1. Les ondes sonores et ultrasonores sont des ondes mécaniques.

Définir ce qu'on appelle une onde mécanique.

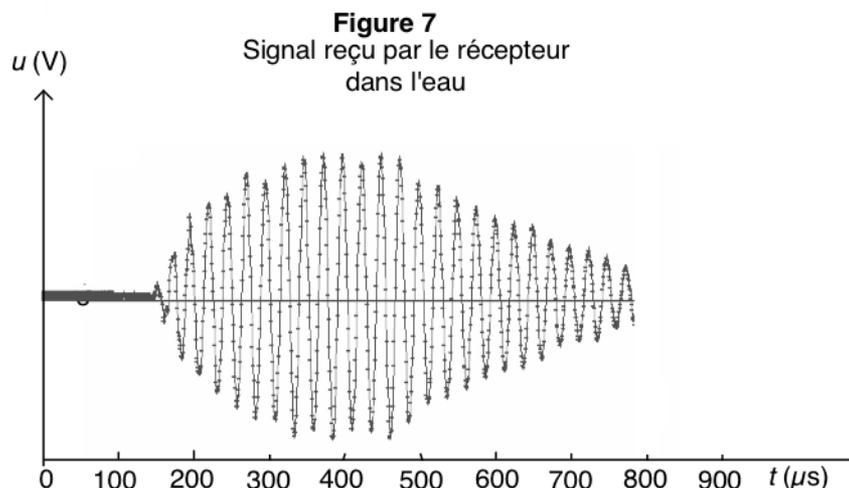
1.2. Les ondes ultrasonores sont des ondes longitudinales.

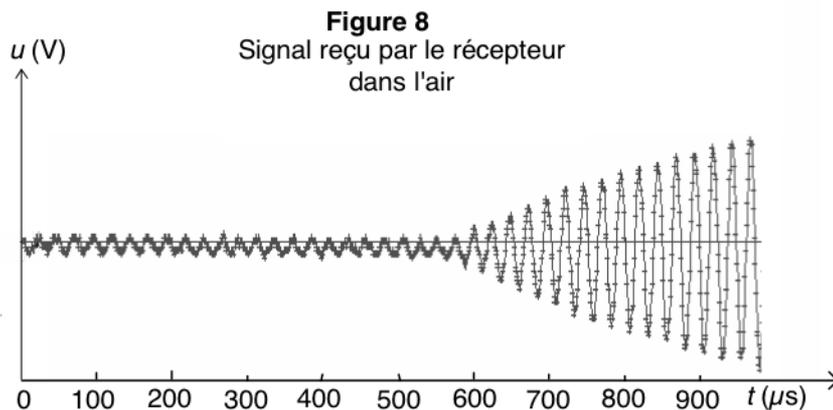
Donner la définition d'une onde longitudinale.

### 2. Vitesse de propagation et milieu de propagation

Un émetteur ultrasonore est relié à un générateur de salves. L'émetteur est le siège d'oscillations très brèves. Le récepteur transforme l'onde ultrasonore reçue en signal électrique de même fréquence que cette onde. L'émetteur et le récepteur, placés dans un même milieu, en regard l'un de l'autre et à une distance donnée  $\ell$ , sont reliés à un oscilloscope à mémoire. Les acquisitions sont transférées vers un tableur grapheur scientifique.

Les graphes ci-dessous donnent le signal capté par le récepteur. L'origine des dates  $t = 0$  s est l'instant de l'émission. Selon les milieux traversés on obtient les deux enregistrements **figure 7** et **figure 8** ci-dessous.





2.1. Sans faire de calcul, expliquer à l'aide des graphiques dans quel milieu la propagation des ultrasons est la plus rapide.

2.2. L'émetteur et le récepteur sont séparés par une distance  $\ell = 20,0$  cm.

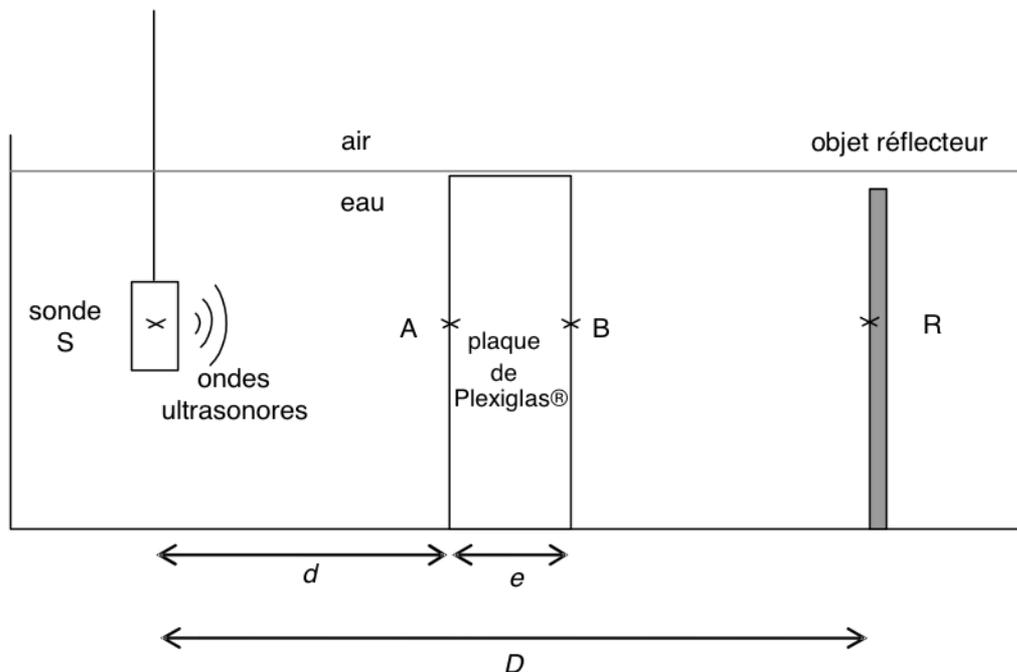
Calculer la vitesse de propagation des ultrasons dans l'eau.

### 3. Comprendre le principe de l'échographie - Modélisation

Dans un récipient rempli d'eau, on place une plaque de Plexiglas® d'épaisseur  $e$ . L'eau simule le corps humain dont la composition est de 65 à 90 % d'eau (excepté pour les os et les dents). La plaque de plexiglas simule un muscle dense.

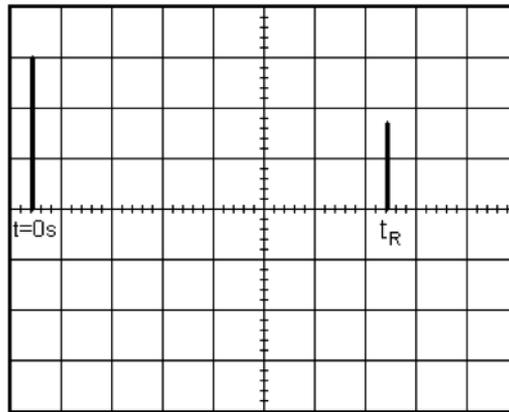
Une sonde échographique constituée d'un émetteur et d'un récepteur est plongée dans l'eau. Les signaux émis et reçus par la sonde sont très brefs. Sur les oscillogrammes, on représentera par un pic simple les signaux nécessaires à l'exploitation. On choisit sur les oscillogrammes l'origine des dates à l'instant de l'émission du signal.

Schéma de principe :



**Figure 9**

3.1. L'oscillogramme **figure 10** est obtenu sans la plaque de Plexiglas<sup>®</sup>. À l'instant  $t = 0$  s on visualise le signal émis par la sonde. À l'instant  $t_R$ , on visualise l'écho réfléchi sur l'objet réflecteur, on l'appellera écho de référence.



La durée de balayage de l'oscilloscope est  $\tau_{osc} = 20 \mu s \cdot div^{-1}$ .

**Figure 10**

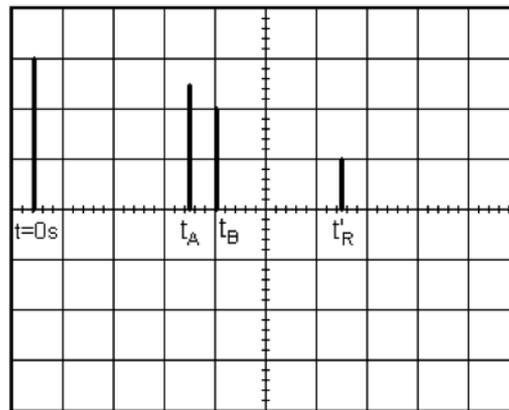
3.1.1. À l'aide de l'oscillogramme **figure 10**, déterminer la date  $t_R$ .

3.1.2. Établir que l'expression de la date  $t_R$  en fonction de la distance  $D$  et de la célérité  $v$  des ultrasons dans l'eau est :

$$t_R = \frac{2.D}{v}$$

3.2. L'oscillogramme **figure 11** est obtenu avec la plaque de Plexiglas<sup>®</sup>.  $t_A$  et  $t_B$  sont les dates auxquelles la sonde détecte les ondes réfléchies par les faces de la plaque de Plexiglas<sup>®</sup>.

Le nouvel écho de référence arrive à la date  $t'_R$ .



La durée de balayage de l'oscilloscope est  $\tau_{osc} = 20 \mu s \cdot div^{-1}$ .

**Figure 11**

3.2.1. Les ultrasons se propagent-ils plus vite dans l'eau ou dans le Plexiglas<sup>®</sup>? Justifier en comparant les résultats obtenus sur **figures 10** et **11**.

3.2.2. On appelle  $v'$  la vitesse de propagation des ultrasons dans le Plexiglas<sup>®</sup>.

a. Montrer que, la longueur  $L$  du trajet total aller-retour du signal dans l'eau uniquement est :

$$= 2 \cdot ( - )$$

b. À l'aide de la question 3.2.2.a, exprimer  $t'_R$  en fonction de  $D$ ,  $e$ ,  $v$  et  $v'$ .

3.2.3. Donner l'expression de la date  $t_A$ , date à laquelle la sonde reçoit l'écho dû à la réflexion partielle au point A, en fonction de  $d$  et  $v$ .

3.2.4. Donner l'expression de la date  $t_B$ , date à laquelle la sonde reçoit l'écho dû à la réflexion partielle au point B, en fonction de  $d$ ,  $e$ ,  $v$  et  $v'$ .

### 3.3. Exploitation des résultats

À partir des expressions de  $t_R$  et  $t'_R$  on montre que  $t_R - t'_R = \frac{2e}{v} - \frac{2e}{v'}$  (**relation 1**)

À partir des expressions de  $t_A$  et  $t_B$  on montre que  $t_B - t_A = \frac{2e}{v'}$  (**relation 2**)

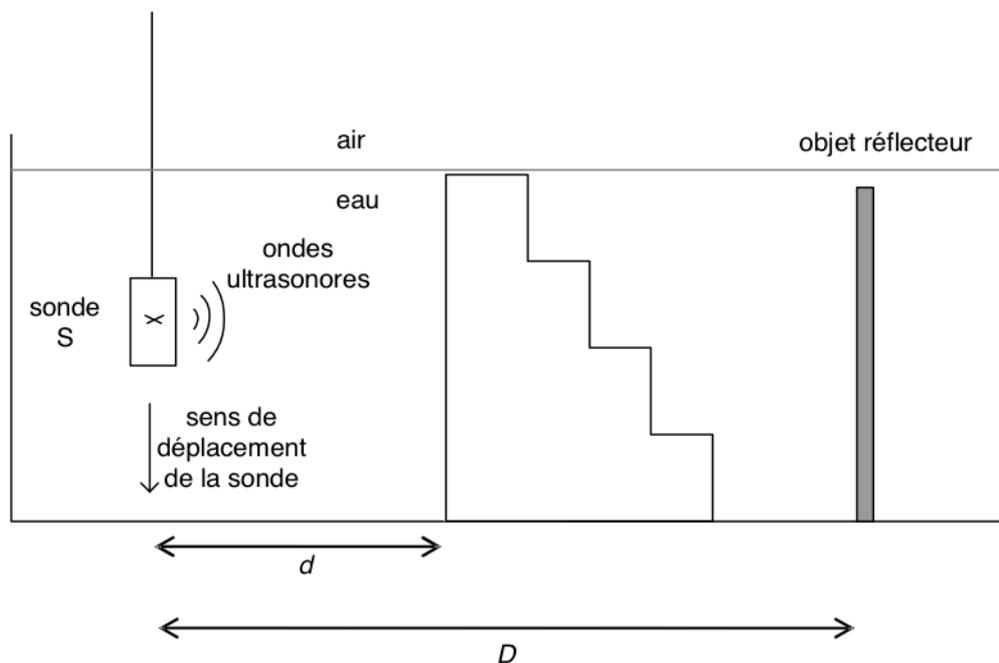
3.3.1. En utilisant les **relations 1 et 2**, montrer que l'épaisseur  $e$  de la plaque a pour expression :  $e = \frac{v}{2}(t_R - t'_R + t_B - t_A)$ .

3.3.2. Connaissant les dates suivantes :  $t'_R = 1,2 \times 10^{-4} \text{ s}$  ;  $t_A = 6,2 \times 10^{-5} \text{ s}$  ;  $t_B = 7,2 \times 10^{-5} \text{ s}$ , calculer la valeur de l'épaisseur de la plaque en prenant  $v = 1,43 \times 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

3.3.3. À partir de la **relation 2**, exprimer  $v'$  en fonction de  $e$ ,  $t_A$  et  $t_B$  puis calculer sa valeur. Ce résultat est-il en accord avec la question 3.2.1. ?

### 3.4. Principe de l'échographie

On place dans la cuve remplie d'eau un objet en *Plexiglas*<sup>®</sup> présentant quatre épaisseurs différentes (voir la **figure 12** ci-dessous) simulant la forme d'un muscle.



**Figure 12**

3.4.1. Comment varie  $t'_R$  au fur et à mesure que la sonde descend ? Justifier.

3.4.2. Comment varie l'écart  $t_B - t_A$  entre l'écho réfléchi à l'entrée de l'objet simulant le muscle et l'écho réfléchi à sa sortie lorsque la sonde descend ? Justifier.

## 1. Les ondes ultrasonores

**1.1.** On appelle onde une perturbation locale d'un milieu, qui se propage dans ce milieu, sans transfert net de matière mais avec transfert d'énergie. Les ondes sont mécaniques quand elles se propagent dans un milieu matériel élastique.

**1.2.** Pour une onde longitudinale, la direction de la perturbation et la direction de propagation sont parallèles.

## 2. Vitesse de propagation et milieu de propagation

**2.1.** Figure 7, dans l'eau, on constate que la salve d'ultrasons est captée par le récepteur plus tôt que dans le cas de la figure 8, dans l'air ; c'est donc la preuve que la propagation des ultrasons est plus rapide dans l'eau que dans l'air, toutes choses égales par ailleurs.

**2.2.** Sur le graphique de la figure 7, on mesure le temps de retard  $\tau$  entre l'émission des ultrasons par l'émetteur au temps  $t_i = 0$ , et sa réception au temps  $t_f$  correspondant au début de la salve, captée par le récepteur :

$$t_f = 146 \mu\text{s} \Rightarrow \tau = 146 \mu\text{s}$$

La célérité  $v$  des ultrasons est alors :

$$v = \frac{\ell}{\tau} = \frac{20,0 \cdot 10^{-2}}{146 \cdot 10^{-6}} = 1,37 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

## 3. Modélisation de l'échographie

**3.1.1.** Sur l'oscillogramme de la figure 10, l'origine  $t = 0$  s est placée à la division  $-4,6$ , et l'écho de référence  $t_R$  à la division  $2,4$  ; en différence la durée entre l'émission et l'écho est donc de :

$$t_R = (2,4 + 4,6) \times 20 = 140 \mu\text{s}$$

On ne fait pas attention aux chiffres significatifs pour l'instant.

**3.1.2.** Les ultrasons parcourent deux fois la distance  $D$ , une fois de l'émetteur à l'objet réflecteur lors de l'aller, une autre fois de l'objet réflecteur au récepteur lors du retour ; la célérité des ultrasons s'exprime comme :

$$v = \frac{2D}{t_R} \Leftrightarrow t_R = \frac{2D}{v}$$

**3.2.1.** Les ultrasons se propagent plus rapidement dans le Plexiglass<sup>®</sup> que dans l'eau, puisque la durée totale de propagation avec Plexiglass<sup>®</sup>  $t_{R'}$  (figure 11) est plus faible que la durée totale sans Plexiglass<sup>®</sup>  $t_R$  (figure 10).

**3.2.2. a.** Lors du trajet total aller-retour, le signal parcourt une distance totale  $2D$ , tout en passant deux fois dans le Plexiglass<sup>®</sup> d'épaisseur  $e$  ; par suite, il faut enlever  $2e$  à  $2D$  pour avoir l'épaisseur d'eau traversée :

$$L = 2D - 2e = 2(D - e)$$

**b.** Notons  $t$  la durée de propagation dans l'eau seule, sur une longueur totale  $L = 2(D - e)$  ; la célérité des ultrasons dans l'eau étant notée  $v$  :

$$v = \frac{2(D - e)}{t} \Leftrightarrow t = \frac{2(D - e)}{v}$$

Notons  $t'$  la durée de propagation dans le Plexiglass<sup>®</sup> seul, sur une longueur totale  $2e$  ; la célérité dans le Plexiglass<sup>®</sup> étant notée  $v'$  :

$$v' = \frac{2e}{t'} \Leftrightarrow t' = \frac{2e}{v'}$$

La durée totale de la propagation, notée  $t_{R'}$ , s'exprime comme la somme des deux durées partielles précédentes :

$$t_{R'} = t + t' = \frac{2(D - e)}{v} + \frac{2e}{v'}$$

**3.2.3.** Le tout premier écho partiel correspond à la propagation dans l'eau seule, de l'émetteur jusqu'au point A, sur une distance aller-retour  $2d$  (figure 9). En notant  $v$  la célérité des ultrasons dans l'eau :

$$v = \frac{2d}{t_A} \Leftrightarrow t_A = \frac{2d}{v}$$

**3.2.4.** Ce deuxième écho correspond au parcours précédent, auquel on ajoute le parcours aller-retour dans le Plexiglass<sup>®</sup>, sur une distance aller-retour  $2e$  entre le point A et le point B, à la célérité  $v'$  :

$$t_B = t_A + \frac{2e}{v'} = \frac{2d}{v} + \frac{2e}{v'}$$

**3.3.1.** On remarque que la relation à démontrer ne fait plus intervenir  $v'$  ; pour l'éliminer entre les relations 1 et 2, on ajoute les deux membres-à-membres :

$$t_R - t_{R'} + t_B - t_A = \frac{2e}{v}$$

On effectue ensuite un produit en croix pour isoler  $e$  :

$$e = \frac{v}{2} (t_R - t_{R'} + t_B - t_A)$$

**3.3.2.** Application numérique, en utilisant la valeur  $t_R = 140 \mu\text{s} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  trouvée précédemment :

$$e = \frac{1,43 \cdot 10^3}{2} \times (1,4 - 1,2 + 0,72 - 0,62) \times 10^{-4}$$

$$e = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 21 \text{ mm}$$

**3.3.3.** On effectue un produit en croix de la relation 2 pour isoler  $v'$  :

$$v' = \frac{2e}{t_B - t_A}$$

Application numérique :

$$v' = \frac{2 \times 2,1 \cdot 10^{-2}}{(7,2 - 6,2) \times 10^{-5}} = 4,2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

On constate que  $v' > v$ , ce qui est bien en accord avec ce qui a été dit à la question 3.2.1 (comme quoi les ultrasons se propagent plus vite dans le Plexiglass<sup>®</sup> que dans l'eau).

**3.4.1.** Plus la sonde descend, plus l'épaisseur de Plexiglass<sup>®</sup> augmente, et donc plus  $t_{R'}$  diminue. En effet, les ultrasons sont plus rapides dans le Plexiglass<sup>®</sup>, donc il est normal que le temps total de propagation diminue quand on en augmente l'épaisseur, toutes choses égales par ailleurs.

**3.4.2.** Pour une distance  $d$  inchangée, le tout premier écho, provenant du point A, sera reçu avec le même temps  $t_A$ ; en revanche, l'épaisseur de Plexiglass<sup>®</sup> augmentant, le temps de réception du deuxième écho, provenant du point B, va augmenter :  $t_B$  augmente. Par suite, la différence  $t_B - t_A$  va augmenter.

En conclusion, la comparaison de l'augmentation de  $t_B$  et de la diminution de  $t_{R'}$  va permettre de trouver l'épaisseur de Plexiglass<sup>®</sup>.

Quant à une éventuelle variation de  $t_A$  avec une différence  $t_B - t_A$  qui resterait constante, elle permettrait de trouver la distance  $d$ , pour une même épaisseur du Plexiglass<sup>®</sup>.

Finalement on constate que l'on peut avec ce système trouver la localisation  $d$  et l'épaisseur  $e$  d'un obstacle comme le Plexiglass<sup>®</sup>.

\* \*  
\*