Chapitre 15

L'oscillateur élastique

15.1 À bâtons rompus

a. Donner les quatre caractéristiques de la force de rappel exercée par un ressort.

b. Donner trois exemples de résonance mécanique.

c. Soit un système solide-ressort horizontal. Effectuer l'étude dynamique en modélisant les forces de frottement par un modèle quadratique $f = hv$. Donner la solution analytique dans le cas où on néglige le frottement. Même question avec $f = hv^2$ (avec une valeur de la constante h différente).

d. Soit l'équation différentielle d'un système solide-ressort soumis à un amortissement non-négligeable :

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$$

Donner la signification et les unités des termes figurant dans cette équation.

Bilan des forces

15.2 N°14 p. 296 : Ressort en compression

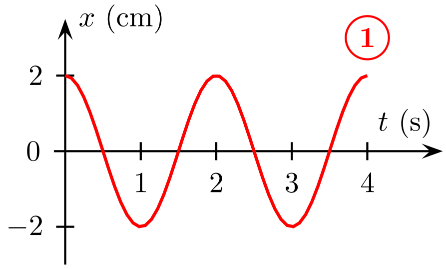
15.3 N°11 p. 296 : Pèse-lettre

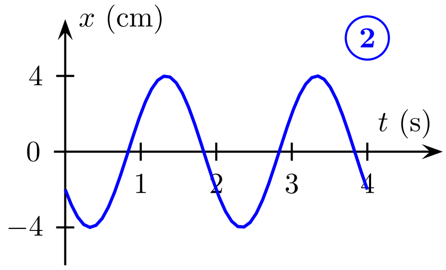
Étude des oscillations

15.4 Étude d'un oscillateur mécanique

On considère un oscillateur formé d'un solide de masse $m = 250$ g fixé à un ressort, le solide se déplaçant sans frottement sur le support horizontal.

On étudie deux mouvements différents ① et ② du centre d'inertie G de ce solide, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On repère la position de G par son abscisse x sur l'axe horizontal $x'x$ d'origine O (qui est la position de G à l'équilibre).





a. À partir des enregistrements, déterminer pour chacune des deux expériences les valeurs de la période propre T_0 et de l'amplitude X_m des oscillations.

b. Parmi les termes suivants, choisir ceux qui décrivent les conditions initiales relatives au ressort pour les deux enregistrements : comprimé, étiré, non déformé.

c. Préciser si à l'instant de date $t_0 = 0$ s, pour chacune des deux expériences, le solide est lâché sans vitesse initiale ou s'il est lancé. Dans ce dernier cas, identifier le sens du lancement.

d. Calculer la raideur k de ce ressort.

15.5 N°16 p. 296 : Différents oscillateurs

Équation différentielle

15.6 Exercice résolu p. 292 : Oscillateur

15.7 N°18 p. 297 : Étude du mouvement

Période propre

15.8 Pendule pesant et pendule élastique

1. Une horloge à balancier est constituée d'un pendule simple, de faible amplitude ($< 10°$), dont les oscillations sont entretenues par un système de poulies et de poids. Elles incrémentent un compteur d'impulsions qui fait avancer les aiguilles.

   a. Pourquoi doit-on prévoir un système d'entretien des oscillations dans une horloge à balancier ?

   b. La masse du pendule a-t-elle une influence sur sa période ?

   c. Sur quel paramètre jouer pour ajuster la période des petites oscillations d'un pendule simple ?

2. En 1714, la Grande-Bretagne promit un prix de 20 000 livres à celui qui réussirait à concevoir une horloge restant fiable sur un navire. En effet, noter précisément l'heure à laquelle le Soleil passe par son point le plus haut (midi solaire) permet de déterminer la longitude du lieu où on se trouve.

Ce prix ne fut remporté que cinquante ans plus tard, par l'horloger de génie John Harrisson, qui a remplacé le pendule pesant par un pendule élastique.

   a. Pourquoi une horloge à balancier est-elle inadaptée sur un navire ?

   b. On considère une masse $m = 100$ g. Calculez la valeur de la longueur ℓ du pendule pesant, et la constante de raideur k du pendule élastique, afin d'obtenir une période propre $T_0 = 1{,}00$ s.

15.9 N°22 p. 298 : Molécule $HC\ell$

Le phénomène de résonance

15.10 N°28 p. 299 : La tôle ondulée

15.11 N°26 p. 299 : Sur banc à coussin d'air

Corrigé 15
L'oscillateur élastique

$\boxed{15.1}$ À bâtons rompus

a. Force de rappel d'un ressort :
- direction : celle du ressort ;
- sens : vers le ressort si étiré, opposé si comprimé ;
- point d'application : le point d'attache ;
- valeur : $F = k|x|$.

b. 

Le pont de Tacoma (Washington, USA) : une résonance des vibrations de torsion du pont sous l'effet du vent modéré a provoqué sa destruction en quelques heures.

La caisse de résonance d'un diapason a des dimensions adaptées à la fréquence propre des oscillations de celui-ci. À contrario, la caisse d'une guitare ne favorise aucune fréquence en particulier, pour que toutes soient amplifiées équitablement.
Se mouiller l'index, frotter le rebord d'un verre suffisamment fin, jusqu'à constater l'émission d'une onde sonore. Souffler dans un tube à essai.

c. Référentiel terrestre supposé galiléen ;
Bilan des forces : poids $\vec{P}$, réaction normale du support $\vec{N}$ compensant exactement le poids, frottement $\vec{f} = -hv\,\vec{v}$, force de rappel du ressort $\vec{F} = -kx\,\vec{\imath}$.
Deuxième loi de Newton : $\vec{P}+\vec{N}+\vec{f}+\vec{F} = m\,\vec{a}_{\mathrm{G}}$
Mouvement selon l'axe (Ox) : $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = (x+\frac{a}{2})\,\vec{\imath}$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{\mathrm{G}} = \dot{x}\,\vec{\imath} \quad \text{et} \quad \vec{a}_{\mathrm{G}} = \ddot{x}\,\vec{\imath}$$

Projection de la deuxième loi de Newton sur l'axe (Ox) :

$$0+0-h\,(\dot{x})^2-kx = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{x}+h\,(\dot{x})^2+kx = 0$$

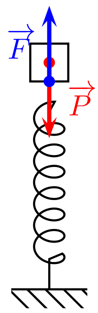
Cette équation différentielle n'est pas intégrable, on aura donc recours à des résolutions numériques, comme la méthode itérative d'Euler.

d. x est l'écart à l'équilibre (m), $\dot{x}$ la vitesse (m.s^{-1}) et $\ddot{x}$ l'accélération (m.s^{-2}). m est la masse (kg), h le cœfficient de frottement (N.s.m^{-1}), k la constante de raideur (N.m^{-1}).

$\boxed{15.2}$ N°14 p. 296 : Ressort en compression

1. Un ressort à spires jointives ne peut travailler qu'en extension. Par conséquent pour étudier la compression il faut choisir un ressort à spires non jointives.

2. Schéma de l'expérience :



3. Bilan des forces :

- Poids $\vec{P}$:
  - direction : verticale ;
  - sens : vers le bas ;
  - point d'application : centre d'inertie G ;
  - valeur : $P = mg$.
- Force de rappel du ressort $\vec{F}$:
  - direction : celle du ressort, vertical ;
  - sens : vers le haut ;
  - point d'application : point d'attache A ;
  - valeur : F.

4. Choix d'un axe (Ox) vertical, orienté vers le bas, d'origine O confondue avec l'extrémité du ressort au repos. Si $M = 0$ kg, alors $x = 0$ cm, et une compression du ressort correspond à une abscisse x qui augmente) :

$$\vec{F} = -kx\,\vec{\imath}$$

À l'équilibre, première loi de Newton :

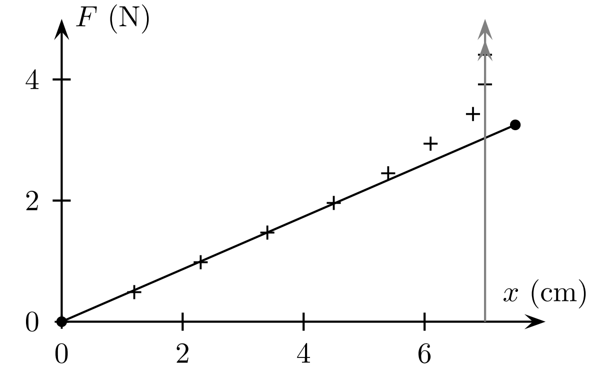
$$\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P}+\vec{F} = \vec{0}$$

Projection sur l'axe (Ox), avec $\vec{P} = M\,\vec{g} = Mg\,\vec{\imath}$ et une abscisse x positive (ressort compressé uniquement) :

$$-kx+Mg = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F = kx = Mg$$

M (kg)	x (cm)	F (N)
0	0	0
0,05	1,2	0,49
0,1	2,3	0,98
0,15	3,4	1,5
0,2	4,5	2,0
0,25	5,4	2,5
0,30	6,1	2,9
0,35	6,8	3,4
0,4	7,0	3,9
0,45	7,0	4,4

5. Courbe de F en fonction de x :



6. Pour une compression faible, la courbe est une relation linéaire, force de rappel F et allongement x sont proportionnels ;

Pour une compression forte, la proportionnalité n'est plus vérifiée, on arrive à la limite du ressort pour laquelle les spires sont jointives, écrasées les unes contre les autres.

7. On détermine la constante de raideur k en utilisant la pente de la partie linéaire, en utilisant l'origine et un second point (indiqué sur la droite) pour la déterminer :

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{3,25 - 0}{(7,5 - 0) \times 10^{-2}} = 43 \times 10^{2} \text{ N.m}^{-1}$$

15.3 N°11 p. 296 : Pèse-lettre

15.4 Étude d'un oscillateur mécanique

a. Expérience ① : $T_0 = 2$ s et $X_\mathrm{m} = 2$ cm ;
Expérience ② : $T_0 = 2$ s et $X_\mathrm{m} = 4$ cm.

b. Expérience ① : le ressort est étiré de 2 cm ;
Expérience ② : le ressort est compressé de 2 cm.

c. La vitesse du solide est égale à la dérivée de sa position, qui s'interprète dans le cas de ce mouvement *unidimensionnel* selon l'axe (Ox) comme la pente de la courbe $x = f(t)$. On a donc les résultats :
- Expérience ① : pente nulle, lâché sans vitesse ;
- Expérience ② : pente négative, vitesse initiale négative, le solide est lâché avec une vitesse initial dont le sens est opposé au sens de l'axe (Ox).

15.5 N°16 p. 296 : Différents oscillateurs

15.6 Exercice résolu p. 292 : Oscillateur

15.7 N°18 p. 297 : Étude du mouvement

15.8 Pendule pesant et pendule élastique

1. a. Un système d'entretien permet de s'affranchir des inévitables frottements.

b. La masse du pendule n'a pas d'influence si on néglige les frottements.

c. Dans le cas des petites oscillations, seule la longueur du pendule a une influence sur la période.

2. a. Une horloge à balancier est inadaptée car le roulis aurait une influence sur ses oscillations.

b. Période propre d'un pendule pesant :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

On isole ℓ :

$$\ell = \frac{gT_0^2}{4\pi^2} = \frac{9,8 \times 1,00^2}{4\pi^2} = 0,25 \text{ m}$$

Période propre d'un pendule élastique :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

On isole k :

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} = \frac{4\pi^2 \times 0,100}{1,00} = 3,9 \text{ N.m}^{-1}$$

15.9 N°22 p. 298 : Molécule $\mathrm{HC}\ell$

15.10 N°28 p. 299 : La tôle ondulée

1. La voiture est dôtée de suspensions, constituées soit de simples ressorts (= oscillateur faiblement amorti), soit d'un ensemble (plus performant) de ressorts et d'amortisseurs (= oscillateur amorti).

2. Les pneus montent et descendent alternativement sur les "vagues" de cette mère de sable. La vitesse détermine la fréquence de ce mouvement alternatif. À basse vitesse, le voyage est confortable mais lent (oscillations de quelques centimètres). À moyenne vitesse, si la fréquence des oscillations est trop proche de la fréquence de résonance des suspensions, elles rentrent en résonance, fortes oscillations du véhicule, voyage très inconfortable. À haute vitesse, le pneu saute de crète en crète, car les suspensions n'ont pas le temps de suivre le mouvement, voyage rapide et confortable.

3. Dimension des ondulations = période spatiale ou longueur d'onde : $\lambda = 25$ cm ;
Vitesse = célérité de l'onde : $v = 35$ km.h^{-1} = $9,7$ m.s^{-1} ;

$$\lambda = vT \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{\lambda}{v} = \frac{0,25}{9,7} = 26 \text{ ms}$$

donc une fréquence de résonance de :

$$f = 1/T = 39 \text{ Hz.}$$

15.11 N°26 p. 299 : Sur banc à coussin d'air