Chapitre 9
Mouvements dans le champ de pesanteur

Aucune formule de cours à apprendre dans ce chapitre, uniquement des démonstrations de cours à connaître sur le bout des doigts.

9.1 **À bâtons rompus**

a. Quelle est l'accélération du centre d'inertie d'un corps tombant en chute libre ? Y-a-t'il une différence entre chute verticale et mouvement parabolique, quant à l'accélération, dans le vide ?

b. Quelle est la nature de la trajectoire d'un solide lancé dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme ?

c. Dans quel plan se situe la trajectoire d'un solide lancé dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme ?

d. Soit une chute libre d'un projectile, lancé avec une vitesse initiale quelconque. Que peut-on dire du mouvement de la projection du centre de gravité G sur un axe horizontal ?

e. Même question que précédemment, mais pour la projection du centre de gravité G sur un axe vertical.

f. De quel angle initial faut-il projeter un solide, pour le voir parcourir la plus grande distance horizontale ? Même question pour la plus grande distance verticale.

g. Expliquer la différence formelle entre équation horaire et équation de la trajectoire.

h. Proposer trois méthodes permettant d'obtenir une gravité nulle (apesanteur) pendant quelques minutes.

9.2 **Vrai-Faux** (Bac 2004 Amérique du Sud, 2 points).

*Cet exercice comporte 8 affirmations. À chaque affirmation, vous répondrez par VRAI ou par FAUX en justifiant votre choix à l'aide de **démonstrations de cours** et de définitions, de calculs, de schémas ou d'analyses dimensionnelles. Toute réponse non justifiée ne rapportera aucun point.*

On considère un projectile évoluant dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme. Le projectile de masse m est lancé à la date $t = 0\,\text{s}$ d'un point O, origine du repère (O,x,z) avec Oz axe vertical ascendant. Le vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ fait un angle α quelconque avec l'horizontale. Le mouvement s'effectue dans le plan vertical contenant les axes Ox et Oz, tel que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est parallèle à Oz. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On néglige toute résistance de l'air.

1. AFFIRMATION : le vecteur accélération $\vec{a_G}$ du centre d'inertie G du projectile ne dépend pas des conditions initiales.

2. AFFIRMATION : le projeté du centre d'inertie G du projectile sur l'axe vertical Oz est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

3. AFFIRMATION : la trajectoire du centre d'inertie G du projectile est parabolique quelque soit la valeur de α.

4. AFFIRMATION : dans le cas où le projectile est lancé d'une hauteur H au dessus du sol avec une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale, l'abscisse de son point de chute est :

$$x = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

9.3 **Grosse Bertha** La « Grosse Bertha », utilisée par les artilleurs allemands en 1918 pour bombarder Paris, avait une portée maximale de 120 km.

a. Équations horaires (vitesse initiale $\vec{v}_0$ quelconque) ;

b. Équation de la trajectoire ;

c. Portée P ;

d. Sachant que la portée est maximale pour un angle de tir de 45°, déterminer la vitesse théorique de l'obus à la sortie du fût.

e. En réalité cette vitesse était de $1\,600\,\text{m.s}^{-1}$. Expliquer la différence.

9.4 **N°17 p. 238 : Étude d'un document**

9.5 **N°19 p. 239 : Ping-pong**

9.6 **N°20 p. 240 : Tennis**

9.7 **Golf**

Si vous avez déjà fait les exercices précédents, passez directement à la dernière question pour éviter une répétition.

Dans un repère $\mathcal{R}(\text{O}\,;\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$, les équations horaires d'une balle de golf lancée à la date $t=0$ d'un point O, avec la vitesse $\overrightarrow{v}_0$, sont :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha\, t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}$$

a. Préciser les axes du repère.

b. Donner les expressions de l'altitude maximale h atteinte par la balle, appelée flèche, et de la portée horizontale d du tir.

c. Pour quelle valeur de α la portée est-elle maximale ?

d. Montrer qu'une même portée peut être atteinte pour deux angles de tir.

9.8 Exploiter un document

Pour cet exercice, utilisez la fonction tableur de votre calculatrice.

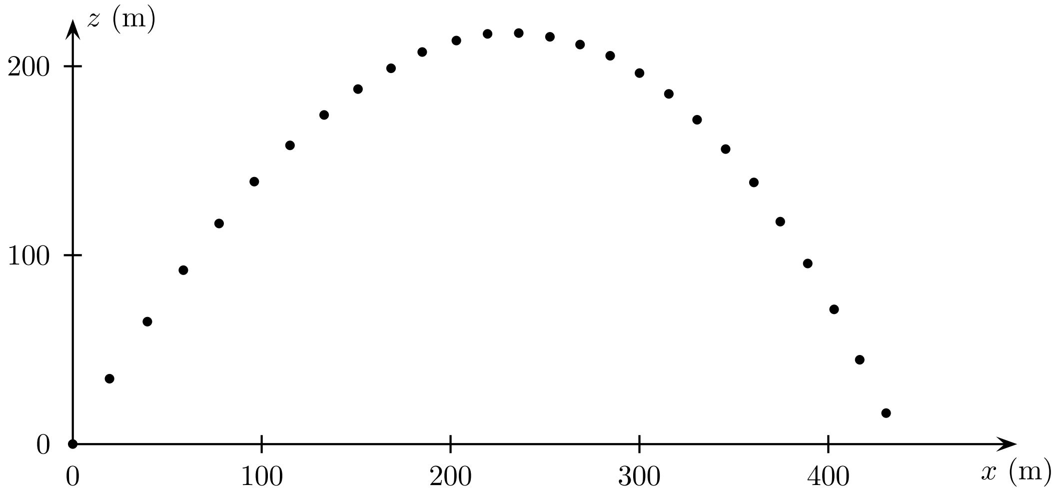
On réalise une chronophotographie du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur, tel que reproduit sur la figure ci-dessous. L'intervalle de temps entre deux images successivez est de 60 ms. La vitesse initiale vaut $v_0 = 60$ cm.s^{-1}, pour un angle de lancé initial $\alpha = 60°$. Le projectile est lancé depuis l'origine O du repère. Le vecteur vitesse initial $\overrightarrow{v}_0$ est dans le plan (xOz).

a. En projetant horizontalement les positions successives du centre d'inertie sur le repère, indiquer dans un tableau les valeurs successives de l'abscisse x, et calculer les valeurs de la composante v_x de la vitesse.

b. Commenter les résultats.

c. En projetant verticalement les positions successives du centre d'inertie sur le repère, indiquer dans un tableau les valeurs successives de l'ordonnée y, et calculer les valeurs de la composante v_y de la vitesse et a_y de l'accélération.

d. Commenter les résultats.



Corrigé 9
Mouvements dans le champ de pesanteur

9.1 À bâtons rompus

a. $\vec{a}_G = \vec{g} = -g\vec{k}$, autant pour un mouvement vertical que parabolique.

b. En l'absence de forces de frottement, la trajectoire est parabolique.

c. Le plan du mouvement est vertical.

d. La projection du centre d'inertie G sur l'axe horizontal a un mouvement uniforme. En effet, en l'absence de frottements, l'accélération a une seule composante, verticale. Rien sur l'horizontale pour modifier le mouvement.

e. Si la vitesse initiale est vers la haut, le mouvement est tout d'abord uniformément décéléré vers le bas ($\vec{g}$), puis uniformément accéléré dès que le projectile se remets à descendre.
Si la vitesse initiale est vers le bas, le mouvement est uniformément accéléré.

f. L'angle initial maximisant la portée est $\alpha = 45°$. Avec un angle de $\alpha = 0°$, on maximise la hauteur atteinte par le projectile.

g. Une équation horaire donne les coordonnées en fonction du temps, alors que l'équation de la trajectoire ne fait pas intervenir le temps.

h. Ascenseur en chute avec l'accélération $\vec{g}$, Airbus "zéro G" avec la même condition sur le vecteur accélération donc avec le pilotage automatique bloqué sur une trajectoire parabolique (déconnecter avant le crash afin que la compagnie puisse invoquer l'erreur humaine), ISS (Station Spatiale Internationale) en chute libre autour de la Terre (voir chapitre 10)

9.2 Vrai-Faux

1. Vrai. Le montrer en appliquant la deuxième loi de Newton, afin de montrer que $\vec{a}_G = \vec{g}$, donc vecteur accélération constant indépendant de $\overrightarrow{OG_0}$ et $\vec{v}_0$.
2. Faux. Le montrer en établissant les équations horaires paramétriques ; le projeté de G a même côte z que G ; l'équation $z(t)$ correspond à une fonction parabolique du temps t, donc à un mouvement rectiligne uniformément varié.
3. Faux. Dans quelques cas particuliers, la trajectoire est un point ($v_0 = 0$, le projectile ne bouge pas !) ou une droite ($\alpha = \pm 90°$, mouvement de chute verticale). Le montrer en remplaçant ces valeurs particulières de v_0 et α dans les équations horaires paramétriques $x(t)$ et $z(t)$.
4. Vrai. Dans le cas particulier où $\alpha = 0°$, les équations paramétriques se réduisent à :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Reste à trouver la valeur de x lorsque $z = -H$. Utiliser cette dernière relation pour trouver le temps t correspondant, et remplacer cette valeur dans $x(t)$.

9.3 Grosse Bertha

c. Voir le cours pour la démonstration de la formule de la portée P :

$$P = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

d. Pour un angle $\alpha = 45°$, la portée est maximale :

$$P_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

La vitesse de l'obus à la sortie du fût vaut donc :

$$v_0 = \sqrt{g P_{\max}} = 1\,084 \text{ m.s}^{-1}$$

e. Frottements de l'air, altitudes différentes entre le point de lancement et le point de chute.

9.4 N°17 p. 238 : Étude d'un document

9.5 N°19 p. 239 : Ping-pong

9.6 N°20 p. 240 : Tennis

9.7 Golf

a. L'axe (Oz) est vertical ascendant (composant $-g$ donc dirigée vers le bas dans $z(t)$) ; l'axe (Ox) est horizontal, dans le plan du mouvement, l'axe (Oy) est perpendiculaire au plan du mouvement (composante $y(t) = 0$).

b. Dérivons les équations horaires, pour obtenir l'expression de la vitesse :

$$\vec{v} \left| \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$$

Le projectile atteint le sommet S de sa trajectoire lorsque sa vitesse verticale s'annule :

$$v_z(t_s) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_s = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

La côte du sommet S est alors :

$$h = z(t_s) = -\frac{1}{2} g t_s^2 + v_0 \sin\alpha \, t_s$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}$$

La portée d du tir est la valeur de x lorsque $z = z_0$, ici zéro :

$$z(t_p) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}gt_p^2 + v_0 \sin\alpha\, t_p = 0$$

$$t_p = 0 \quad \text{ou} \quad -\frac{1}{2}gt_p + v_0 \sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_p = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Équation horaire pour x :

$$d = x(t_p) = v_0 \cos\alpha\, t_p$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

c. La portée est maximale pour $\alpha = 45^o$:

$$d_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

d. Il faut résoudre l'équation en α :

$$\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = d \quad \Leftrightarrow \quad \sin(2\alpha) = \frac{dg}{v_0^2}$$

L'expression au second membre est strictement positive, et inférieure à l'unité, donc on deux solutions pour l'angle α :

$$2\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{dg}{v_0^2}\right) \quad \text{et} \quad \pi - 2\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{dg}{v_0^2}\right)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{dg}{v_0^2}\right) \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{dg}{v_0^2}\right)$$

$\boxed{9.8}$ Exploiter un document

a. Le tableau ci-dessous indique les résultats des mesures et des calculs demandés pour les composantes horizontales. Pour calculer la vitesse moyenne, on a utilisé la formule :

$$v_{x,i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

i	t (ms)	x (cm)	v_x (cm.s^{-1})
1	0	0	
2	60	19	325
3	120	39	333
4	180	59	325
5	240	78	308
6	300	96	308
7	360	115	308
8	420	133	300
9	480	151	300
10	540	169	283
11	600	185	283
12	660	203	291
13	720	220	275
14	780	236	275
15	840	253	275
16	900	269	266
17	960	285	258
18	1 020	300	258
19	1 080	316	258
20	1 140	331	250
21	1 200	346	250
22	1 260	361	241
23	1 320	375	233
24	1 380	389	233
25	1 440	403	233
26	1 500	417	233
27	1 560	431	

b. On remarque que la vitesse horizontale décroît lors du mouvement. Le projectile est donc soumis à des forces de frottement non négligeables.

c. Le tableau ci-dessous indique les résultats des calculs pour les composantes verticales. On a utilisé la formule suivante pour la vitesse moyenne :

$$v_{y,i} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

et pour l'accélération moyenne :

$$a_{y,i} = \frac{v_{y,i+1} - v_{y,i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

i	y (cm)	v_y (m.s^{-1})	a_y (m.s^{-2})
1	0		
2	35	5,4	
3	65	4,8	-9,2
4	92	4,3	-7,4
5	117	3,9	-7,4
6	139	3,4	-8,1
7	158	2,9	-8,1
8	174	2,5	-7,4
9	188	2,1	-7,0
10	199	1,6	-7,0
11	208	1,2	-7,0
12	214	0,8	-7,4
13	217	0,3	-7,7
14	218	-0,1	-7,0
15	216	-0,5	-6,0
16	212	-0,8	-6,3
17	205	-1,3	-7,0
18	196	-1,7	-6,7
19	185	-2,1	-6,3
20	172	-2,4	-6,0
21	156	-2,8	-6,3
22	138	-3,2	-6,7
23	118	-3,6	-5,6
24	96	-3,9	-5,6
25	71	-4,2	-6,0
26	45	-4,6	
27	16		

d. On remarque que la vitesse verticale v_z n'est jamais constante, et que l'accélération verticale est inférieure à $g = 9,81$ m.s^{-2}, et décroît avec le temps.