DS n°5 – TS1 2012
Chutes des boulets (8 points, 1h45)

Exercice 1 – Galilée à Pise (5,5 points)

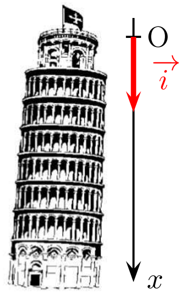


Fig. 1 – Tour de pise.

Selon la légende, Galilée (1564-1642) aurait étudié la chute des corps en lâchant divers objets du sommet de la tour de Pise (Italie), sa ville de naissance. Il y fait référence dans deux ouvrages : *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* et *Discours concernant deux sciences nouvelles* dans lesquels il remet notamment en question les idées d'Aristote.

Dans cet exercice, on présente trois courts extraits de ces deux livres. Il s'agit de retrouver certains résultats avancés par Galilée concernant la chute verticale dans l'air d'un boulet sphérique en fer, lâché sans vitesse initiale. Pour cette étude, on choisit le référentiel terrestre, supposé galiléen, auquel on adjoint un repère d'espace (Ox) vertical orienté vers le bas (figure 1).

Donnée : Intensité du champ de pesanteur, supposé uniforme : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Modélisation par une chute libre

1.1. Étude des hauteurs de chute

> Extrait n°1 :
> « Avant tout, il faut considérer que le mouvement des corps lourds n'est pas uniforme : partant du repos, ils accélèrent continuellement (...). Si on définit des temps égaux quelconques, aussi nombreux qu'on veut, et si on suppose que, dans le premier temps, le mobile, partant du repos, a parcouru tel espace, par exemple une aune(*), pendant le second temps, il en parcourra trois, puis cinq pendant le troisième (...) et ainsi de suite, selon la suite des nombres impairs. »
>
> (*) Une aune = 1, 14 m.

Le boulet est lâché au point O, d'abscisse $x_0 = 0$ à la date $t_0 = 0$. On suppose l'action de l'air négligeable ; dans ce cas, l'équation horaire du mouvement du centre d'inertie G du boulet est : $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

1.1.1. Soient x_1 la distance parcourue au bout de la durée τ, x_2 la distance parcourue au bout de la durée 2τ et ainsi de suite, exprimer x_1, x_2, x_3 en fonction de g et de τ.

1.1.2. Exprimer la différence $h_1 = x_1 - x_0$ en fonction de g et de τ puis les différences $h_2 = x_2 - x_1$ et $h_3 = x_3 - x_2$ en fonction de h_1.

1.1.3. Retrouve-t-on la suite des hauteurs de chute annoncée par Galilée dans l'extrait n°1 ? Justifier.

1.2. Étude de la durée de la chute

Les points de vue d'Aristote et de Galilée, au sujet de l'influence de la masse m du boulet sur la durée totale Δt de sa chute, diffèrent.

> Extrait n°2 :
> « Cherchons à savoir combien de temps un boulet, de fer par exemple, met pour arriver sur la Terre d'une hauteur de cent coudées(*).
> Aristote dit qu'une « boule de fer de cent livres(**), tombant de cent coudées, touche terre avant qu'une boule d'une livre ait parcouru une seule coudée », et je vous dis, moi, qu'elles arrivent en même temps.
> Des expériences répétées montrent qu'un boulet de cent livres met cinq secondes pour descendre de cent coudées »
>
> (*) Une coudée correspond à une distance de 57 cm ;
> (**) Une livre est une unité de masse.

1.2.1. Parmi les propositions ci-dessous, attribuer celle qui correspond à la théorie d'Aristote et celle qui correspond à la théorie de Galilée :

a. La durée de chute augmente quand la masse du boulet augmente ;

b. La durée de chute diminue quand la masse du boulet augmente ;

c. La durée de chute est indépendante de la masse.

1.2.2. En utilisant l'expression $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$, calculer la durée Δt de la chute d'un boulet qui tombe d'une hauteur totale $H = 57$ m (100 coudées).
Ce résultat est différent de la valeur annoncée dans l'extrait n°2. Proposer une explication à l'écart constaté.

2. Chute réelle

Galilée admet plus loin que les deux boules, de masses respectives une et cent livres, arrivent au sol avec un léger écart.

> Extrait n°3 :
> « Vous constatez, en faisant l'expérience, que la plus grande précède la plus petite de deux doigts, c'est-à-dire que quand celle-là frappe le sol, celle-ci s'en trouve encore à deux doigts. Or, derrière ces deux doigts(*), vous ne retrouverez pas les quatre-vingt-dix-neuf coudées d'Aristote. »
>
> (*) Doigt : unité de longueur ne dépassant pas quelques centimètres normalement...

On considère que trois forces s'exercent sur un boulet pendant sa chute verticale : son poids $\overrightarrow{P}$, la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}$ et la force de frottement $\overrightarrow{f}$.

La norme de la force de frottement a pour expression :

$$f = \frac{1}{2}\pi R^2 \rho_{\text{air}} C v^2$$

où v est la vitesse du centre d'inertie du boulet, R est le rayon du boulet et C est une constante sans unité.

Données :

Masse volumique de l'air : $\rho_{\text{air}} = 1,29\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$;

Masse volumique du fer : $\rho_{\text{fer}} = 7,87 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$;

Volume d'une sphère : $V_{\text{S}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

2.1. Lors de la chute, représenter ces trois forces sur un schéma sans souci d'échelle.

2.2. Le poids et la poussée d'Archimède sont constants pendant la chute d'un boulet. Établir le rapport de leurs expressions et en déduire que la poussée d'Archimède est négligeable.

2.3. Étude dynamique

2.3.1. Appliquer la deuxième loi de Newton. Projeter les forces sur l'axe (Ox) vertical orienté vers le bas (figure 1). Déterminer l'expression de la dérivée par rapport au temps de la vitesse $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

2.3.2. En déduire que l'expression de la vitesse limite v_ℓ est :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{8\rho_{\text{fer}} R g}{3\rho_{\text{air}} C}}$$

2.3.3. Vérifier, en effectuant une analyse dimensionnelle, que l'expression de v_ℓ est bien homogène à une vitesse.

2.4. On considère deux boulets sphériques B_1 et B_2 en fer de masses respectives $m_1 = 1$ livre et $m_2 = 100$ livres, et de rayons respectifs $R_1 = 2,2$ cm et $R_2 = 10,1$ cm. On note $v_{1\ell}$ et $v_{2\ell}$ les vitesses limites respectives des boulets B_1 et B_2. Exprimer le rapport :

$$\frac{v_{2\ell}}{v_{1\ell}}$$

en fonction des seuls rayons R_1 et R_2 et en déduire le boulet qui a la vitesse la plus élevée.

2.5. Un logiciel permet de simuler les évolutions de la vitesse $v(t)$ (figure 2) et de la position $x(t)$ du boulet pendant sa chute (figure 3 et zoom de la figure 3 sur la figure 4). Ces courbes sont obtenues pour les trois situations suivantes :
- la chute du boulet B_1 dans l'air (courbes c et c') ;
- la chute du boulet B_2 dans l'air (courbes b et b') ;
- la chute libre (courbes a et a').

2.5.1. Expliquer l'attribution des courbes b et c aux boulets B_1 et B_2.

2.5.2. La hauteur de chute est de 57 m. Déterminer graphiquement la date t_{sol} à laquelle le premier boulet touche le sol. S'agit-il de B_1 ou de B_2 ?

2.5.3. À quelle distance du sol se trouve l'autre boulet à cette date ? Ce résultat est-il en accord avec l'extrait n°3 ?

Exercice 2 – GALILÉE à VENISE (2,5 points)

En 1592, GALILÉE quitte PISE pour l'Université de PADOUE, dépendant de VENISE. Cette dernière ville possède un arsenal tout-à-fait considérable, et la légende raconte qu'il était inutile de chercher GALILÉE dans les salles de l'Université, que l'on avait plus de chance de le trouver sur les chantiers navals, dont il appréciait l'ambiance, et où il a pû faire preuve de son incroyable ingéniosité. GALILÉE a notamment le premier indiqué qu'il faut pointer les fûts de canon à un angle de 45° afin de permettre la distance de tir la plus grande possible.

Dans les navires de guerre de l'époque, de lourds canons sont fixés au pont, et projètent des boulets de 200 livres (environ 100 kg) portant jusqu'à 1 200 toises (environ 2 400 m). La structure d'un navire est très robuste pour résister à la réaction considérable du boulet et leur échantillon(*) est ordinairement très fort.

(*) Échantillon : dimension et épaisseur des pièces utilisées en construction navale.

1. Action de la poudre de canon sur le boulet

L'éjection du boulet est provoquée par la combustion de la poudre. Une force de poussée est donc exercée sur le boulet par l'ensemble {navire + canon + gaz}.
Justifier l'expression soulignée dans le texte encadré ci-dessus, à l'aide d'une des trois lois de NEWTON. Énoncer cette loi (on pourra s'aider d'un schéma).

2. La trajectoire du boulet

On souhaite étudier la trajectoire du centre d'inertie G du boulet de masse m. L'étude est faite dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le repère d'étude est (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et l'origine des dates est choisie à l'instant où le boulet part du point O (voir figure 5 ci-contre).

Le vecteur vitesse initiale $\vec{v}_0$ du point G est incliné d'un angle α (appelé angle de tir) par rapport à l'horizontale. Une fois le boulet lancé, la force de poussée de la partie précédente n'intervient plus.

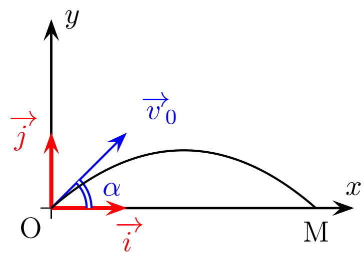


FIG. 5 – Trajectoire du boulet.

Données : boulet utilisé : volume $V = 12,7\ \text{dm}^3 = 12,7$ L et masse $m = 100$ kg.

2.1. Inventaire des forces agissant sur le boulet après son lancement

2.1.1. La poussée d'ARCHIMÈDE
Donner l'expression littérale de la valeur F_A de la poussée d'ARCHIMÈDE puis la calculer.

2.1.2. Le poids
Calculer la valeur P du poids du boulet après avoir précisé son expression littérale.

2.1.3. Dans cet exercice, on pourra négliger la poussée d'ARCHIMÈDE devant le poids si la valeur de ce dernier est au moins cent fois plus grande que celle de la poussée d'ARCHIMÈDE.
Montrer que l'on est dans cette situation.

2.1.4. Pendant le vol, compte tenu de la masse, de la vitesse et de la forme du boulet, on fait l'hypothèse que les forces de frottement dans l'air sont négligeables devant le poids.
En tenant compte de la remarque et des résultats précédents, établir le bilan des forces exercées sur le système {boulet} pendant le vol.

2.2. Équation de la trajectoire

Dans toute cette partie, on négligera la poussée d'ARCHIMÈDE et on ne tiendra pas compte des forces de frottement dues à l'air.

2.2.1. En appliquant la deuxième loi de NEWTON, montrer que les équations horaires du mouvement du point G s'écrivent :

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\, t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\alpha)\, t$$

DOCUMENTS DE L'EXERCICE I

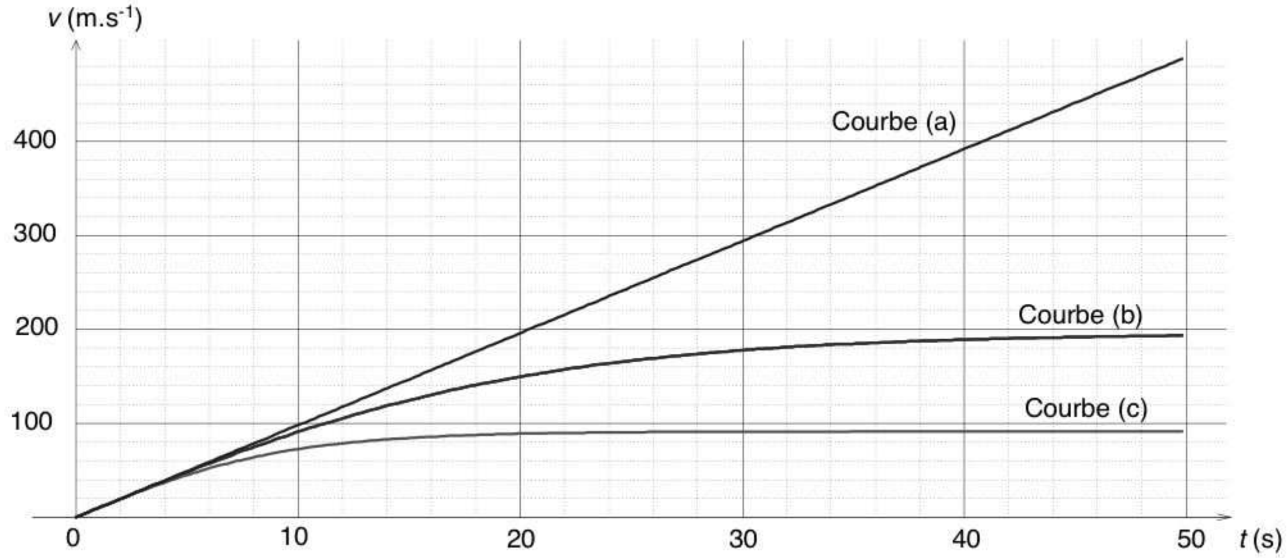


Figure 2. Évolution des vitesses

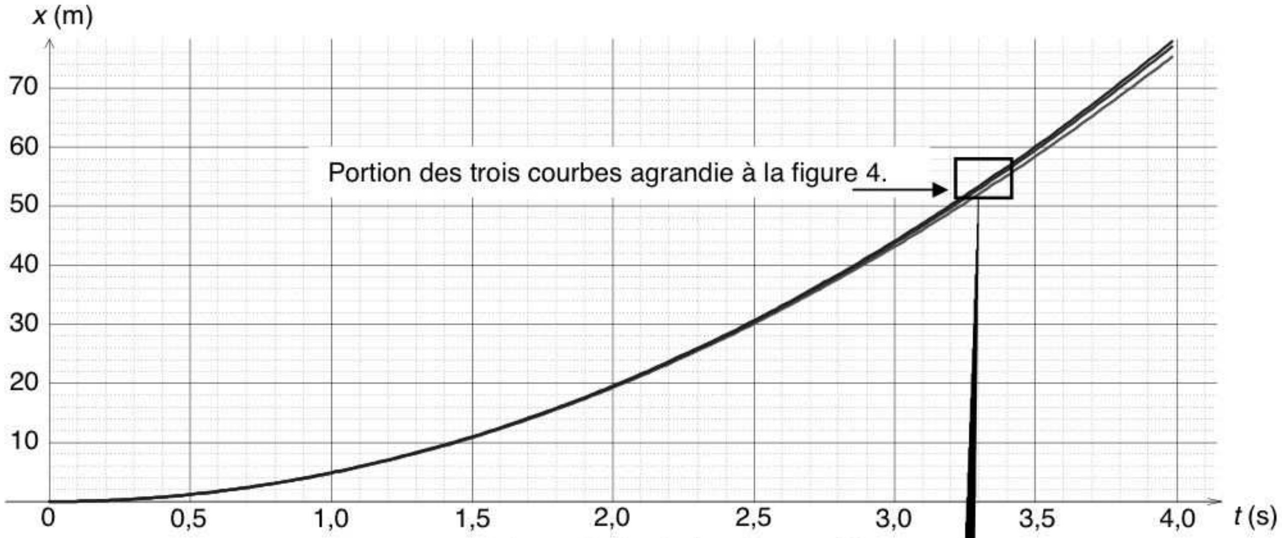


Figure 3. Évolution des positions

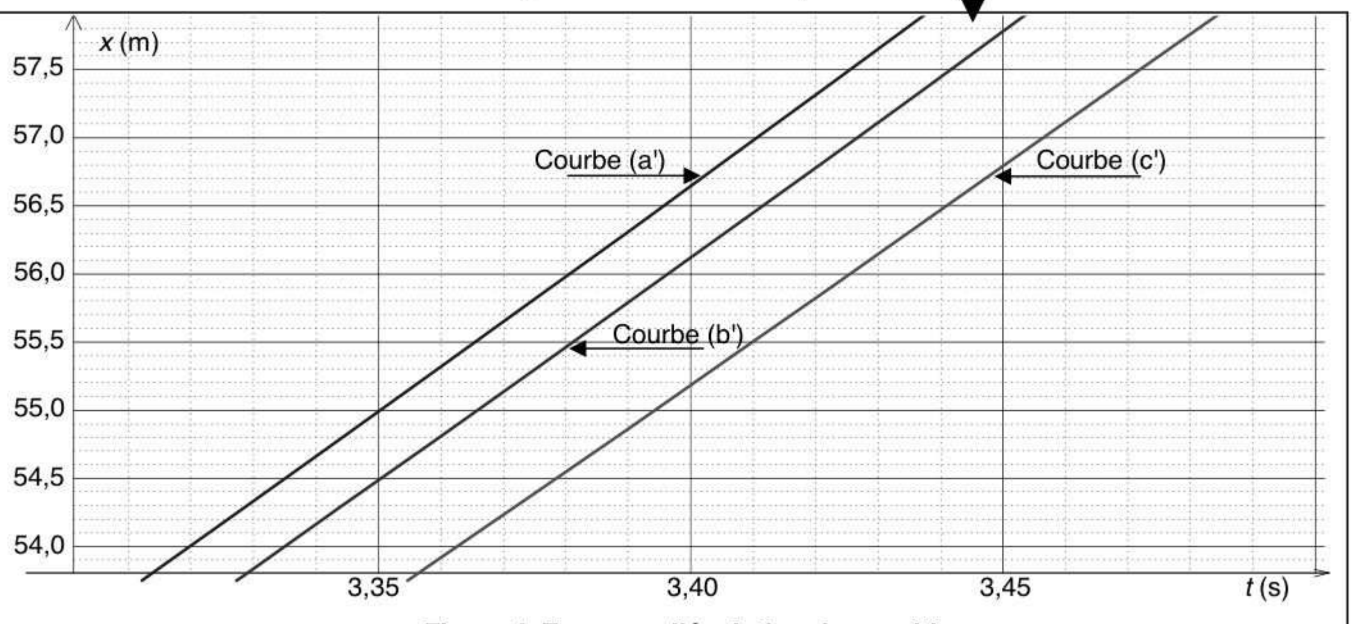


Figure 4. Zoom sur l'évolution des positions

Corrigé du DS n°5 – TS1 2012
Chutes des boulets (8 points, 1h45)

Exercice 1 – Galilée à Pise (5,5 points)

1. Modélisation par une chute libre

1.1.1. On applique l'équation horaire $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$:

$$x_1 = \frac{1}{2}g\tau^2 \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{2}g(2\tau)^2 = \frac{4}{2}g\tau^2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}g(3\tau)^2 = \frac{9}{2}g\tau^2$$

1.1.2. On utilise les expressions précédentes :

$$h_1 = x_1 - x_0 = \frac{1}{2}g\tau^2 - 0 = \frac{1}{2}g\tau^2$$
$$h_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2}g\left(4\tau^2 - \tau^2\right) = \frac{3}{2}g\tau^2$$
$$h_3 = x_3 - x_2 = \frac{1}{2}g\left(9\tau^2 - 4\tau^2\right) = \frac{5}{2}g\tau^2$$

On peut alors exprimer chaque hauteur en fonction de h_1 :

$$h_1 = \frac{1}{2}g\tau^2$$
$$h_2 = \frac{3}{2}g\tau^2 = 3h_1$$
$$h_3 = \frac{5}{2}g\tau^2 = 5h_1$$

1.1.3. Oui, on retrouve la suite des hauteurs de chute annoncée par Galilée.
Ainsi, partant de l'instant initial $t = 0$, le corps en chute parcourt la distance h_1 pendant la durée τ ; pendant la même durée supplémentaire, il parcourt la distance $h_2 = 3h_1$, puis encore dans la même durée une distance $h_3 = 5h_1$. Finalement, pour des temps τ égaux, la distance parcourue est la suite arithmétique de raison $2h_1$ et de premier terme h_1, tel qu'annoncé par Galilée.

1.2.1. La proposition **a** n'est à mettre au crédit d'aucun de nos deux illustres scientifiques, quoique Aristote fusse plutôt considéré en son temps comme un mathématicien et un philosophe (donc un métaphysicien, de *méta* : « avant »), que comme un scientifique ;
La proposition **b** correspond à l'affirmation d'Aristote — il ne basait pas ses affirmations sur l'expérience, contrairement à Galilée ;
La proposition **c** correspond à l'affirmation de Galilée.
Lors de Bac ces trois réponses ont été notées en « tout ou rien ».

1.2.2. Expression de la durée Δt de la chute en fonction de la hauteur H de chute :

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}g\Delta t^2 = H$$
$$\Leftrightarrow \quad g\Delta t^2 = 2H$$
$$\Leftrightarrow \quad \Delta t^2 = \frac{2H}{g}$$
$$\Leftrightarrow \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Application numérique :

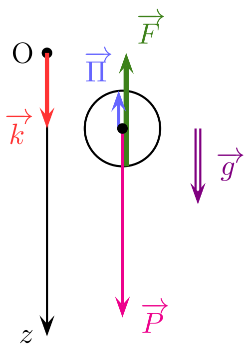
$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 \times 57}{9,8}} = 3,4 \text{ s}$$

L'extrait n°2 annonce un temps de 5 s. La différence en pourcentage constatée est de :

$$\frac{5 - 3,4}{3,4} = 47\,\%$$

Elle peut provenir du fait que l'équation horaire utilisée pour le calcul n'est valable que dans le cas d'une chute libre, alors que Galilée ne disposait pas des moyens techniques permettant de créer le vide d'air (1654 et Otto von Guericke pour le premier vide), ou tout au moins d'obtenir des frottements négligeables dans un vide partiel, et encore moins de chronométrer les temps de manière précise.

2.1.



2.2. Expression du poids :

$$P = mg = \rho_{\text{fer}}gV$$

Expression de la poussée d'Archimède :

$$\Pi = m_{\text{air}}g = \rho_{\text{air}}gV$$

Rapport des deux :

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{\rho_{\text{fer}}gV}{\rho_{\text{air}}gV} = \frac{\rho_{\text{fer}}}{\rho_{\text{air}}}$$

Application numérique :

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{7,87 \times 10^3}{1,29} = 6,10 \times 10^3 \gg 1$$

Or $\rho_{\text{air}} \ll \rho_{\text{fer}}$ donc $\rho_{\text{fer}}/\rho_{\text{air}} \gg 1$, et par suite :

$$\frac{P}{\Pi} \gg 1 \quad \Leftrightarrow \quad P \gg \Pi$$

i. e., la poussée d'Archimède est négligeable.

2.3.1. Système : {boulet} ;

Référentiel terrestre supposé galiléen, repère d'axe (Oz) vertical descendant ;

Bilan des forces :
- Poids $\overrightarrow{P}$, vertical, vers le bas, en G, valeur P donnée précedemment ;
- Force de frottement $\overrightarrow{f}$, opposée au mouvement, verticale, au centre du maître-couple, valeur f donnée dans l'énoncé ;
- Poussée d'Archimède $\overrightarrow{\Pi}$, verticale, vers le haut, en G, valeur négligeable par rapport au poids P.

Éléments cinématiques : les conditions initiales et les forces imposent un mouvement vertical, selon l'axe (Oz), donc :

$$\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = a\,\overrightarrow{k} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{k}$$

Deuxième loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = m\,\overrightarrow{a} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} = m\,\overrightarrow{a}$$

En projection sur l'axe (Oz) vertical descendant :

$$\begin{aligned} & P - f = ma \\ \Rightarrow\ & \rho_{\text{fer}} V g - \frac{1}{2}\pi R^2 \rho_{\text{air}} C v^2 = \rho_{\text{fer}} V \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{\pi R^2 \rho_{\text{air}} C}{2\rho_{\text{fer}} V} v^2 \end{aligned}$$

Cette équation différentielle n'admet pas de solution analytique.

2.3.2. Lorsque le régime permanent est atteint, la vitesse atteint une valeur limite $v(t \to \infty) = v_\ell$ constante :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}v_\ell}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad & g - \frac{\pi R^2 \rho_{\text{air}} C}{2\rho_{\text{fer}} V} v_\ell^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\pi R^2 \rho_{\text{air}} C}{2\rho_{\text{fer}} V} v_\ell^2 = g \\ \Leftrightarrow \quad & v_\ell^2 = \frac{2\rho_{\text{fer}} V g}{\pi R^2 \rho_{\text{air}} C} \\ \Leftrightarrow \quad & v_\ell = \sqrt{\frac{2\rho_{\text{fer}} V g}{\pi R^2 \rho_{\text{air}} C}} \end{aligned}$$

V est le volume d'une sphère :

$$\begin{aligned} V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad & v_\ell = \sqrt{\frac{8\pi \rho_{\text{fer}} R^3 g}{3\pi R^2 \rho_{\text{air}} C}} \\ \Rightarrow \quad & v_\ell = \sqrt{\frac{8\rho_{\text{fer}} R g}{3\rho_{\text{air}} C}} \end{aligned}$$

2.3.3. En notations françaises inutilement compliquées :

$$\begin{aligned} [v_\ell] &= \left(\frac{\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ [v_\ell] &= \left(\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ [v_\ell] &= \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1} \end{aligned}$$

En notations internationales évidentes :

$$\begin{aligned} [v_\ell] &= \left(\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ [v_\ell] &= \left(\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ [v_\ell] &= \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \qquad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

2.4. À partir de la formule démontrée à la question **2.3.2** :

$$\frac{v_{2\ell}}{v_{1\ell}} = \frac{\sqrt{\frac{8\rho_{\text{fer}} R_2 g}{3\rho_{\text{air}} C}}}{\sqrt{\frac{8\rho_{\text{fer}} R_1 g}{3\rho_{\text{air}} C}}} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

$R_2 > R_1$ donc $v_{2\ell} > v_{1\ell}$, le boulet n°2 a la vitesse limite la plus élevée.

2.5.1. Sur la figure 2 de l'annexe, la courbe (b) a une asymptote horizontale à 200 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, quant la courbe (c) a son asymptote à 100 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Ces asymtotes correspondent aux vitesses limites. La courbe (b) correspond donc au boulet n°2, et la (c) au boulet n°1.

2.5.2. Le premier boulet à toucher le sol est le boulet le plus rapide : le boulet n°2, correspondant à la courbe (b'), qui est bien la première à atteindre 57 m (si on met de côté la courbe (a'), qui correspond au cas idéal sans frottement).
Pour mesurer précisément l'abscisse t_{sol} de la courbe $x = f(t)$, on utilise le zoom sur la figure 4. Tout d'abord, pour trouver le facteur d'échelle, on mesure la distance entre les graduations 3,35 s et 3,45 s : 8,25 cm. Ensuite, on mesure la distance entre la graduation 3,40 s et l'abscisse de t_{sol} : 2,2 cm. On utilise ces mesures pour trouver la valeur de t_{sol} :

$$t_{\text{sol}} = 3,40 + \frac{2,2}{8,25} \times (3,45 - 3,35) = 3,427 \text{ s}$$

2.5.3. La position de l'autre boulet à la date t_{sol} est donnée par lecture graphique sur la courbe (c') de la figure 4 : $x = 56,0$ m.
Il y a donc $57 - 56 = 1$ mètre de différence, ce qui est bien supérieur aux deux doigts annoncés par Galilée ! Là encore, les moyens dont disposait Galilée à l'époque ne permettaient pas d'évaluer avec précision cet écart.

Exercice 2 – La galiote

1. Loi de l'action et de la réaction, ou troisième loi de Newton : « Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B ». La force de poussée exercée par l'ensemble { galiote + canon + gaz } est égale et opposée à la réaction exercée par le système { boulet }.

2.1.1. Poussée d'Archimède : égale et opposée au poids du fluide déplacé, ici l'air, de masse volumique ρ, avec V pour le volume déplacé :

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{A}} = -\rho V \overrightarrow{g}$$

(La relation vectorielle étant certainement facultative). En intensité :

$$F_{\mathrm{A}} = \rho V g = 1,3 \times 16 \times 10^{-3} \times 10$$
$$F_{\mathrm{A}} = 2,1 \times 10 \times 10^{-3} \times 10 = 0,21 \text{ N}$$

2.1.2. Poids :

$$\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{g}$$

Intensité :

$$P = mg = 100 \times 10 = 1\,0 \times 10^{-3} \text{ N}$$

2.1.3. Rapport des intensités :

$$\frac{P}{F_{\mathrm{A}}} = \frac{1\,0 \times 10^{-3}}{0,21}$$

Ce rapport est supérieur à 100. On est bien dans le cas où on peut négliger la poussée d'Archimède.

2.1.4. Bilan des forces sur le système {boulet} : poids $\overrightarrow{P}$. Toutes les autres forces sont négligeables, conformément aux questions précédentes. Il s'agit donc d'une chute libre.

2.2.1. Deuxième loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{F}_{\mathrm{ext}} = m\,\overrightarrow{a}_{\mathrm{G}}$$
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{g} = m\,\overrightarrow{a}_{\mathrm{G}}$$
$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{a}_{\mathrm{G}} = \overrightarrow{g}$$

Projection dans le repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$\overrightarrow{a}_{\mathrm{G}} = \left| \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{array} \right.$$

Intégration par rapport au temps :

$$\overrightarrow{v}_{\mathrm{G}} = \left| \begin{array}{l} \dot{x} = v_{0\,x} \\ \dot{y} = -gt + v_{0\,y} \end{array} \right.$$

Conditions initiales : $\overrightarrow{v}_{\mathrm{G}}(t=0) = \overrightarrow{v}_0$

$$\Rightarrow \quad v_{0\,x} = v_0 \cos\alpha \quad \text{et} \quad v_{0\,y} = v_0 \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{v}_{\mathrm{G}} = \left| \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$$

Seconde intégration par rapport au temps :

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \left| \begin{array}{l} x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t + x_0 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t + y_0 \end{array} \right.$$

Conditions initiales : G en O à $t = 0$

$$\Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \text{et} \quad y_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \left| \begin{array}{l} x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)\,t \end{array} \right.$$

2.2.2. Éliminons t en l'exprimant à l'aide de $x(t)$:

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha)\,t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

Remplaçons dans l'expression de $y(t)$:

$$y = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)\,x$$

Identification avec la solution proposée par l'énoncé :

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} \\ B = \tan\alpha \end{cases}$$

Analyse dimensionnelle :

$$\begin{cases} [A] = \frac{\mathrm{m.s^{-2}}}{(\mathrm{m.s^{-1}})^2} = \frac{\mathrm{m.s^{-2}}}{\mathrm{m^2.s^{-2}}} = \mathrm{m^{-1}} \\ [B] = \text{sans unité} \end{cases}$$

2.3.1. La portée d est la distance entre les deux points de passage à l'altitude nulle $y = 0$:

$$y = x(Ax + B) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ Ax + B = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{B}{A} \text{ noté } d \end{cases}$$

2.3.2. La portée d est maximale en fonction de α pour $\sin 2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi)$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^{\mathrm{o}}$$

1. Galilée à Pise ... /22

-1 point si les chiffres significatifs sont incorrects.

- ❑ $x_1 = \frac{1}{2}g\tau^2$, $x_2 = \frac{1}{2}g(4\tau^2)$, $x_3 = \frac{1}{2}g(9\tau^2)$, tout ou rien
- ❑ $h_1 = \frac{1}{2}g\tau^2$, $h_2 = 3h_1$, $h_3 = 5h_1$, -1 par erreur
- ❑ $h_1 = \frac{1}{2}g\tau^2$, $h_2 = 3h_1$, $h_3 = 5h_1$, -1 par erreur
- ❑ Oui, on retrouve la suite proposée par Galilée + Justification $h_2 = 2h_1$ et $h_3 = 5h_1$
- ❑ (b) pour Aristote : la durée diminue si la masse augmente, tout ou rien avec suivant !
- ❑ (c) pour Galilée : la durée est indépendante de la masse, tout ou rien avec précédent !
- ❑ $\Delta t = 3,4$ s, calculé
- ❑ Mesure approximative de Δt ou de H ou frottements, un seul des trois exigé
- ❑ Schéma avec les 3 forces dans leurs bons sens, autres caractéristiques non notées
- ❑ $P = mg = \rho_{\text{fer}}Vg$ et $\Pi = \rho_{\text{air}}Vg$, tout ou rien
- ❑ $\Pi/P = \rho_{\text{air}}/\rho_{\text{fer}} \ll 1$ donc poussée d'Archimède négligeable, tout ou rien
- ❑ $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{f} = m\,\overrightarrow{a}$, accepté si $\overrightarrow{\Pi}$ encore présent
- ❑ Projection $P - f = ma$, accepté si $-\Pi$ encore présent
- ❑ $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = g - \pi R^2\rho_{\text{air}}Cv^2/2m$, accepté si $-\Pi$ encore présent
- ❑ Vitesse limite $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$
- ❑ Démonstration de l'expression de l'énoncé $v_\ell = \sqrt{8\rho_{\text{fer}}Rg/3\rho_{\text{air}}C}$
- ❑ $(\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}/\mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}\cdot 1)^{1/2} = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$, bien une vitesse
- ❑ $v_{2\ell}/v_{1\ell} = \sqrt{R_2/R_1}$, démontré + Boulet 2 vitesse plus élevée car $R_2 > R_1$ (1/2 chaque)
- ❑ Courbe (c) pour B_1 et courbe (b) pour B_2, car $v_{2\ell} > v_{1\ell}$
- ❑ $3,425$ s $\leqslant t_{\text{sol}} \leqslant 3,429$ s + il s'agit du boulet B_2
- ❑ B_1 est à 56,0 m
- ❑ Les 1 m de différence sont bien plus importants que les 2 doigts de Galilée

2. Galilée à Venise ... /10

-1 point si les chiffres significatifs sont incorrects.

- ❑ Énoncé 3$^{\text{ème}}$ loi de Newton
- ❑ Explication 2 systèmes
- ❑ $F_{\mathrm{A}} = \rho_{\text{air}}gV = 0,16$ N
- ❑ $P = mg = 9,8 \times 10^2$ N *(tout ou rien)*
- ❑ $P/F_{\mathrm{A}} \gg 1$ donc poussée d'Archimède négligeable
- ❑ Bilan des forces : poids du boulet
- ❑ 2$^{\text{ème}}$ loi de Newton ou $\overrightarrow{P} = m\,\overrightarrow{a}_{\mathrm{G}}$
- ❑ $\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -mg \end{cases}$ *(ou projection correcte équivalente)*
- ❑ Double intégration
- ❑ Double conditions initiales (x en cos et y en sin)

Total ... /32

Note ... /20