Chapitre 8
Chutes verticales

Exercices

N'oubliez pas l'étonnant exercice résolu page 218.

8.1 À bâtons rompus

a. On laisse tomber un objet du haut d'une tour. Faites un graphique représentant le module de la vitesse en fonction de la distance parcourue depuis le début de la chute, lorsque la résistance de l'air est (a) négligée, ou (b) prise en compte.

b. Un objet lancé à la verticale vers le haut est momentanément au repos lorsqu'il se trouve à sa hauteur maximale. Quelle est son accélération en ce point ?

c. Si l'on tient compte de l'effet de la résistance de l'air sur un corps projeté verticalement vers le haut, le temps qu'il met pour s'élever est-il supérieur ou inférieur au temps qu'il met pour tomber ?

d. Une méthode simple de mesure de votre temps de réflexe consiste à demander à quelqu'un de laisser tomber une règle entre vos doigts. Quel est le principe de ce test ? (Cette méthode donne une estimation optimiste, car vous êtes prévenu de l'événement.)

e. À partir des formules obtenues pour la chute libre, trouvez la relation liant la vitesse et la hauteur de chute. Calculer la vitesse atteinte en 1 m de chute (quand on tombe de sa chaise), 1,8 m (quand on tombe de sa hauteur, tête première c'est plus marrant) et 2,6 m (chute depuis le premier étage, je vous déconseille la vérification expérimentale). Conclure en comparant avec les temps de réflexe (1/2 seconde). À partir de quelle valeur de l'intensité de la pesanteur serions-nous obliger de garder en permanence un casque sur la tête ?

f. À partir des obtenues pour la chute libre, trouvez les temps et les hauteurs de chute correspondant aux limites de vitesse du code de la route.

8.2 N°14 p. 221 : Mongolfière

8.3 N°18 p. 221 : Utilisation d'un tableur

8.4 N°22 p. 221 : Saut en parachute

8.5 N°27 p. 204 : Chute d'une bille

Attention, cet exercice est listé dans le chapitre précédent de votre livre.

8.6 Voyager

À partir des données envoyées par l'engin spatial *Voyager* en 1979, l'ingénieure Linda Morabito a découvert sur Io, un satellite de Jupiter, le premièr volcan extraterrestre en cours d'éruption. Le panache de l'éruption, constitué de blocs de lave, s'élevait à 280 km d'altitude environ. Sachant que l'accélération due à la gravité à la surface d'Io vaut 1,8 m/s^2, et supposant qu'elle demeure constante jusqu'à la hauteur maximale de la lave, déterminez :

a. la vitesse à laquelle les débris étaient projetés ;

b. le temps qu'il leur fallait pour atteindre la hauteur maximale.

8.7 Méthode d'Euler

Une bille de volume V, de masse volumique ρ, a été lâchée sans vitesse initiale dans un liquide de masse volumique ρ'. Elle a un mouvement de chute verticale.

a. Montrer que dans le cas où la force de frottement exercée par le liquide est de la forme :

$$\overrightarrow{f} = -k\,\overrightarrow{v},$$

l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = av + b$$

b. Rappeler le principe de la méthode d'Euler.

c. Le tableau de valeurs ci-dessous est un extrait de feuille de calcul d'un tableur correspondant aux valeurs :

$$a = -9{,}0\ \mathrm{s}^{-1} \quad \text{et} \quad b = 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

t (s)	v (m · s^{-1})
0	0
0,03	0,30
0,06	0,52
0,09	0,68
0,12	0,80

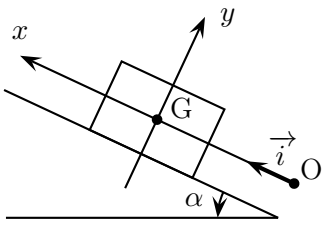
t (s)	v (m · s^{-1})
0,15	0,88
0,18	0,94
0,21	
0,24	
0,27	

Compléter le tableau en calculant les trois dernières valeurs de v par la méthode numérique d'Euler.

d. Représenter graphiquement la fonction $v = f(t)$. En déduire la vitesse limite et le temps caractéristique.

8.8 Mouvement sur un plan incliné

On considère un solide de masse m et de centre d'inertie G, en mouvement sur la droite de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.



Les frottements sont négligés : la force modélisant l'action du plan incliné sur le solide est donc perpendiculaire au plan incliné.

Le solide est lancé vers la partie supérieure du plan incliné selon l'axe $(O\,;\vec{i})$, avec une vitesse initiale de valeur v_0. À la date $t = 0$, le centre d'inertie G se trouve en O, son vecteur vitesse est alors égal à $v_0\,\vec{i}$. On étudie le mouvement de G pour $t > 0$.

1. a. Faire l'inventaire des forces appliquées au solide. Les représenter sur un schéma.

b. Montrer que la coordonnée a selon $(O\,;\vec{i})$ du vecteur accélération de G est égale à $-g\sin\alpha$.

c. Qualifier le mouvement de G.

2. a. Donner l'équation différentielle vérifiée par la coordonnée v du vecteur vitesse G.

b. Exprimer v en fonction de la date t.

c. Mêmes questions pour la coordonnée x de G.

3. a. Donner l'expression de la date t_M à laquelle G atteint son point le plus haut.

b. En déduire l'expression de la coordonnée x_M de ce point en fonction de $g\sin\alpha$ et de v_0.

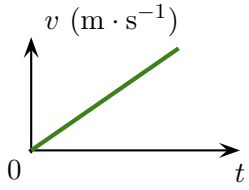
4. L'angle α vaut 10,0°. On souhaite atteindre un point distant de 80,0 cm. Quelle valeur minimale faut-il donner à v_0 ?

Corrigé 8
Chutes verticales

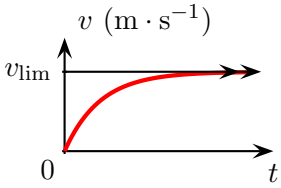
Exercices

8.1 À bâtons rompus

a. Si on néglige la résistance de l'air :



Si la résistance de l'air est prise en compte :



b. Lorsque la vitesse de l'objet est nulle, les frottements *fluides* (ici frottement de l'air) sont nuls aussi. Les seules forces en présence sont le poids et la poussée d'Archimède. Dans l'hypothèse où l'on néglige cette dernière, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} = m\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\,\vec{g} = m\,\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{g}$$

On obtient ainsi, en ce point particulier d'une chute freinée, la même accélération que pour la chute libre.

c. Tout au long de son mouvement, autant dans la phase de montée que dans la phase de descente, le corps est freiné par la force de frottement. Il perd donc de l'énergie. En conséquence, il ne peut pas repasser au point où on l'a lancé avec la même énergie cinétique E_c : cette dernière sera inférieure. Il en est de même pour sa vitesse v, telle que $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. Par suite, il va donc mettre plus de temps pour redescendre que pour monter !

d. Le principe consiste à lire la graduation à laquelle on arrive à attraper la règle. Par exemple, si on attrape la règle à 25 cm, cela signifie qu'elle a eut le temps de tomber 25 cm, et que le temps de chute correspondant correspond au temps de réflexe :

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Leftrightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 0,25}{9,8}} = 0,23\text{ s}$$

8.2 N°14 p. 221 : Montgolfière

8.3 N°18 p. 221 : Utilisation d'un tableur

1. Formule pour le calcul de la vitesse moyenne :

$$\vec{v}_i \simeq \frac{\overrightarrow{M_{i+1}M_{i-1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\overrightarrow{M_{i+1}M_{i-1}}}{2\Delta t}$$

En langage compréhensible pour l'ordinateur, à taper en `C4` et à recopier vers le bas :

```
=(B5-B3)/(A5-A3)
```

Formule pour le calcul de l'acccélération moyenne :

$$\vec{a}_i \simeq \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{2\Delta t}$$

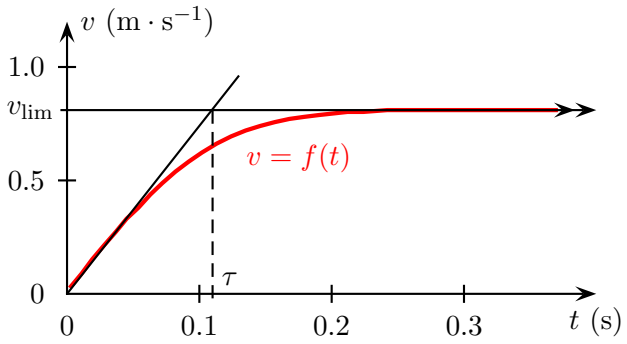
À taper en `D4` et à recopier vers le bas :

```
=(C5-C3)/(A5-A3)
```

2. La courbe $v = f(t)$ admet une asymptote horizontale pour :

$$v(t \to \infty) \simeq 0,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ noté } v_{\text{lim}}$$

3. La courbe $v = f(t)$ admet une tangente à l'origine qui coupe l'asymptote horizontale pour $\tau \simeq 0,11$ ms.



4. Équation de la tangente à l'origine : $v = 7,4 \cdot t$
Cette tangente à l'origine aurait pour équation $v = gt$ si la poussée d'Archimède était négligeable. La réponse est donc : non, elle n'est pas négligeable, elle compte pour :

$$\frac{9,8 - 7,4}{9,8} \times 100 = 24\,\%$$

8.4 N°22 p. 221 : Saut en parachute

1. Si la chute est libre, la seule force qui s'exerce est le poids total : viande + équipement.

2. Le système étudié est Chrichri et son bardage, le tout dans un référentiel terrestre supposé galiléen ; la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{f} = m\,\vec{a}$$

Projetée sur un axe vertical ascendant :

$$-mg + hv = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

D'où l'équation différentielle demandée :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{h}{m}v = -g$$

La vitesse limite, constante, se caractérise par :

$$v = v_{\text{lim}} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}v_{\text{lim}}}{\mathrm{d}t} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{h}{m}v_{\text{lim}} = -g$$

$$\Leftrightarrow \quad v_{\text{lim}} = \frac{mg}{h}$$

Application numérique :

$$v_{\text{lim}} = \frac{100 \times 9,8}{10^{-3}} = 9,8{\cdot}10^{5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Valeur non réaliste.

3. L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{\lambda}{m}v^2 = -g$$

Et la vitesse limite :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

4. Utilisons la formule précédente :

$$\lambda = \frac{mg}{v_{\text{lim}}^2}$$

Application numérique :

$$\lambda = \frac{100 \times 9,8}{\left(\frac{200 \times 1\,000}{3\,600}\right)^2} = 0,318 \text{ u S. I.}$$

8.5 N°27 p. 204 : Chute dans différents fluides

8.6 Voyager

a. On considère que la chute est une chute libre, c'est-à-dire sans frottements. Avec $(\mathrm{O}z)$ un axe vertical descendant, d'origine O confondu avec le point d'éruption :

$$v(t) = gt - v_0 \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t$$

Le signe moins devant v_0 indique que la vitesse initiale est orientée vers le haut, en sens inverse de l'axe $(\mathrm{O}z)$.
Au sommet S de la trajectoire, atteint au temps $t = t_{\text{S}}$, la vitesse est nulle :

$$v(t_{\text{S}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad gt_{\text{S}} - v_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad v_0 = gt_{\text{S}}$$

Pour déterminer le temps t_{S}, on utilise l'équation horaire $z(t)$ du mouvement. Au sommet S de la trajectoire, l'altitude vaut 280 km, donc :

$$\begin{cases} z(t_{\text{S}}) = -280\,000\text{m} \\ z(t_{\text{S}}) = \frac{1}{2}gt_{\text{S}}^2 - v_0 t_{\text{S}} \end{cases}$$

En remplaçant v_0 par l'expression trouvée ci-dessus :

$$z(t_{\text{S}}) = \frac{1}{2}gt_{\text{S}}^2 - gt_{\text{S}}^2 = -\frac{1}{2}gt_{\text{S}}^2$$

L'axe $(\mathrm{O}z)$ étant orienté vers le bas, le signe moins est normal pour la coordonnée du sommet S.

$$-280\,000 = -0,9t_{\text{S}}^2 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{S}} = \sqrt{\frac{280\,000}{0,9}} = 558 \text{ s}$$

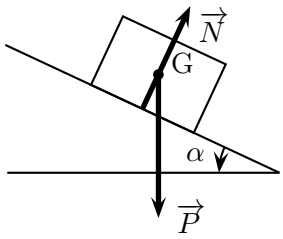
On en déduit la vitesse initiale recherchée :

$$v_0 = gt_{\text{S}} = 1,8 \times 558 \simeq 1\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

8.7 Méthode d'Euler

8.8 Mouvement sur un plan incliné

1. a. Inventaire des forces :
- poids $\overrightarrow{P}$, verticale, vers la bas, appliqué au centre d'inertie G du système, valeur $P = mg$;
- réaction normale du support $\overrightarrow{N}$, perpendiculaire au support, vers le haut, appliquée au centre de la surface de contact.



b. Dans un référentiel supposé galiléen, on applique la deuxième loi de Newton :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} = m\,\overrightarrow{a}$$

On projette cette relation sur le système d'axe (Oxy), l'accélération selon (Oy) étant nulle puisque le mouvement s'effectue uniquement selon (Ox) :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha + 0 = ma \\ -mg\cos\alpha + N = 0 \end{cases}$$

Après simplification par m, on trouve effectivement : $a = -g\sin\alpha$

c. G a un mouvement rectiligne uniformément décéléré puis accéléré, puisque la valeur de l'accélération est égale à une constante.

2. a. La projection de la deuxième loi de Newton sur l'axe (Ox) s'écrit :

$$-mg\sin\alpha = ma$$

Avec $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, l'équation différentielle recherchée est :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\sin\alpha$$

b. On intègre cette équation différentielle :

$$v(t) = -g\sin\alpha\, t + k$$

On détermine la constante d'intégration k avec la condition initiale :

$$v(t=0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad k = v_0$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = -g\sin\alpha\, t + v_0$$

c. On intègre une seconde fois :

$$x(t) = -\frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 + v_0 t + q$$

On détermine la constante d'intégration q avec la condition initiale :

$$x(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad q = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -\frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2 + v_0 t$$

3. a. Lorsque le mobile atteint son point le plus haut, il s'immobilise, prémise à sa chute immuable. Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} v(t_\mathrm{M}) = 0 \\ v(t_\mathrm{M}) = -g\sin\alpha\, t_\mathrm{M} + v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ t_\mathrm{M} = \frac{v_0}{g\sin\alpha}$$

b. On remplace t_M par sa valeur dans l'équation horaire du mouvement, en notant $x_\mathrm{M} = x(t_\mathrm{M})$:

$$x_\mathrm{M} = -\frac{1}{2}g\sin\alpha\, t_\mathrm{M}^2 + v_0 t_\mathrm{M}$$

$$\Rightarrow \quad x_\mathrm{M} = -\frac{1}{2}g\sin\alpha\,\frac{v_0^2}{g^2\sin^2\alpha} + v_0\frac{v_0}{g\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad x_\mathrm{M} = +\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}$$

Vu la complexité de la formule, une étude dimensionnelle s'impose :

$$\left[\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}\right] = \frac{\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{m}.\mathrm{s}^{-2}} = \mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \text{conforme.}$$

4. Utilisons la formule précédente :

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2g\sin\alpha\, x_\mathrm{M}}$$

Application numérique :

$$v_0 = \sqrt{2\times 9{,}8\times\sin(10^\mathrm{o})\times 0{,}800} = 1{,}65\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$\star\,\star\,\star$