

# Enseignement scientifique chapitre 12

## Musique et nombres – Séance 3

### Exercice n° 4 p. 210 Un cycle infini ?

1. À partir d'une fréquence  $f_0$ , lorsque l'on monte de cinq notes, c'est-à-dire que l'on prend une quinte (étymologie : du latin *quintus*, cinquième), on multiplie la fréquence par  $3/2$  :

$$\frac{3}{2} \times f_0$$

#### Exemple

La quinte du Do est le Sol. En effet, les cinq notes sont, dans l'ordre : Do, Ré, Mi, Fa, et Sol, la cinquième note, quinte du Do. On peut ainsi trouver la quinte de n'importe quelle note.

Si l'on applique cet intervalle de  $3/2$  douze fois, alors on multiplie douze fois la fréquence par  $3/2$  :

$$\overbrace{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{3}{2}}^{12 \text{ fois}} \times f_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \times f_0$$

On nous parle de la septième octave. Lorsque l'on monte de huit notes, c'est-à-dire que l'on monte d'une octave (étymologiquement, du latin *octavus*, huitième), on multiplie la fréquence par 2 :

$$2 \times f_0$$

#### Exemple

L'octave d'un Do est à nouveau un Do, puisque l'on monte de huit notes : Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si, et la huitième note, à nouveau un Do. On peut ainsi trouver l'octave de n'importe quelle note.

Si l'on applique cet intervalle de 2 sept fois, alors on multiplie sept fois la fréquence par 2 :

$$\overbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}^{7 \text{ fois}} \times f_0 = (2)^7 \times f_0$$

La phrase en gras indique que les deux intervalles sont différents, ils ne tombent pas sur la même note :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \times f_0 \neq (2)^7 \times f_0$$

Voyons cela numériquement :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129,7 \quad \text{et} \quad (2)^7 = 128,0$$

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ CL	
$(3/2)^{12}$	129.7463379
$2^7$	128

Effectivement, les deux notes seront différentes, puisque les intervalles sont différents :  $129,7 \neq 128$ .

2. La n-ième quinte sera égale à la p-ième octave si :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = (2)^p$$

3. Transformons l'expression précédente, en utilisant une propriété des puissances :

$$\frac{3^n}{2^n} = (2)^p$$

Multiplions les deux membres par  $2^n$  et simplifions à gauche :

$$3^n = 2^p \times 2^n$$

Toujours avec les propriétés bien connues des puissances, simplifions le membre de droite :

$$3^n = 2^{n+p}$$

Comme indiqué dans l'énoncé, une puissance de 3 est toujours impaire ; voici les premières valeurs pour  $n = 1, 2, 3, \dots$  :

$n$	1	2	3	4
$3^n$	3	9	27	81
$n$	5	6	7	8
$3^n$	243	729	2187	6561
$n$	9	10	11	12
$3^n$	19 683	59 049	177 147	531 441

Une puissance de 2 est quant à elle toujours paire ; voici les premières valeurs pour  $n + p = 1, 2, 3, \dots$  :

$n + p$	1	2	3	4
$2^{n+p}$	2	4	8	16
$n + p$	5	6	7	8
$2^{n+p}$	32	64	128	256

$n + p$	9	10	11	12
$2^{n+p}$	512	1024	2048	4096
$n + p$	13	14	15	16
$2^{n+p}$	8192	16384	32768	65536
$n + p$	17	18	19	20
$2^{n+p}$	131072	262144	524288	1048576



Pour trouver les notes, il suffit de réciter sa gamme dans l'ordre, en comptant cinq notes à chaque fois.

Quelques soient les entiers  $n$  et  $p$ , il va être impossible d'avoir l'égalité entre les deux membres de l'équation. Tout au plus peut-on trouver quelques combinaisons proches, par exemple,  $n = 12$  et  $n + p = 19$  (voir les valeurs encadrées), c'est-à-dire justement  $p = 7$ , la fameuse quinte « du loup ».

Autrement dit, cette équation n'a pas de solution. Le cycle des quintes ne reboucle jamais sur l'octave.

### Exercice n° 6 p. 210 Une harpe

- Si l'on note  $f$  la fréquence de la note émise par la première corde, la treizième corde, à l'octave de la première, doit émettre une fréquence avec un intervalle de 2, c'est-à-dire  $2 \times f$ .

Avec la formule proposée pour la fréquence fondamentale  $f$  émise par une corde, on constate que la longueur  $L$  de la corde est inversement proportionnelle à  $f$  :

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow f \propto \frac{1}{L}$$

Donc si la fréquence double, la longueur doit être divisée par deux :  $\frac{L}{2}$ .

- Les cordes sont toutes entre une longueur  $\frac{L}{2} = 0,5 \times L$  et  $1 \times L$ .
- Première quinte :** L'intervalle pour une quinte est  $\frac{3}{2}$  : la longueur doit donc être de  $\frac{2}{3}$  de la longueur  $L$ , donc  $\frac{2}{3} \times L = 0,6667 \times L$ . C'est un Sol.

#### Remarques

Pour tous les calculs, je conserve quatre chiffres après la virgule, avec un arrondi éventuel sur le quatrième chiffre. Réglage de la calculatrice en « Flottant 4 » :



- Deuxième quinte :**  $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 2,25$ , à ramener dans l'octave entre 1 et 2 en divisant par 2 :  $2,25/2 = 1,125$ . Et donc une longueur  $L/1,125 = 0,8889 \times L$ . C'est un Ré.

#### Remarque

Dans la suite, le nombre de divisions par 2 est trouvé par tâtonnement : diviser autant de fois que nécessaire par 2 à la calculatrice pour obtenir un résultat entre 1 et 2, et compter le nombre de fois, de plus en plus important.

**Troisième quinte :**  $(\frac{3}{2})^3 = 3,375$ , à diviser par 2 donc  $3,375/2 = 1,6875$ . Et donc une longueur  $L/1,6875 = 0,5926 \times L$ . C'est un La.

**Quatrième quinte :**  $(\frac{3}{2})^4 = 5,0625$ , à diviser par  $2^2$  donc  $5,0625/2^2 = 1,2656$ . Et donc une longueur  $L/1,2656 = 0,7901 \times L$ . C'est un Mi.

**Cinquième quinte :**  $(\frac{3}{2})^5 = 7,5938$ , à diviser par  $2^2$  donc  $7,5938/2^2 = 1,8984$ . Et donc une longueur  $L/1,8984 = 0,5267 \times L$ . C'est un Si.

**Sixième quinte :**  $(\frac{3}{2})^6 = 11,3906$ , à diviser par  $2^3$  donc  $11,3906/2^3 = 1,4238$ . Et donc une longueur  $L/1,4238 = 0,7023 \times L$ . C'est un Fa♯.

**Septième quinte :**  $(\frac{3}{2})^7 = 17,0859$ , à diviser par  $2^4$  donc  $17,0859/2^4 = 1,0679$ . Et donc une longueur  $L/1,0679 = 0,9364 \times L$ . C'est un Do♯.

**Huitième quinte :**  $(\frac{3}{2})^8 = 25,6289$ , à diviser par  $2^4$  donc  $25,6289/2^4 = 1,6018$ . Et donc une longueur  $L/1,6018 = 0,6243 \times L$ . C'est un Sol♯.

**Neuvième quinte :**  $(\frac{3}{2})^9 = 38,4434$ , à diviser par  $2^5$  donc  $38,4434/2^5 = 1,2014$ . Et donc une longueur  $L/1,2014 = 0,8324 \times L$ . C'est un Mi♭.

**Dixième quinte :**  $(\frac{3}{2})^{10} = 57,6650$ , à diviser par  $2^5$  donc  $57,6650/2^5 = 1,8020$ . Et donc une longueur  $L/1,8020 = 0,5549 \times L$ . C'est un Sib.

**Onzième quinte :**  $(\frac{3}{2})^{11} = 86,4976$ , à diviser par

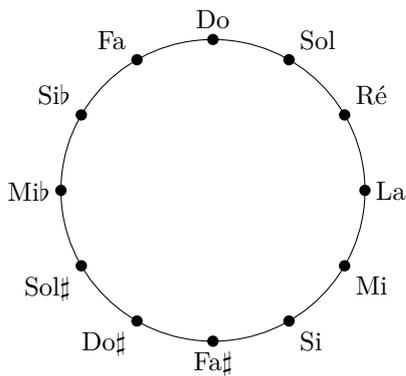
$2^6$  donc  $86,4976/2^6 = 1,3515$ . Et donc une longueur  $L/1,3515 = 0,7399 \times L$ . C'est un Fa.

**Douzième quinte :** C'est la quinte du loup. Il est décidé de garder le facteur 2 exact, et donc  $0,5 \times L$  pour la longueur de la treizième corde. C'est le Do à l'octave.

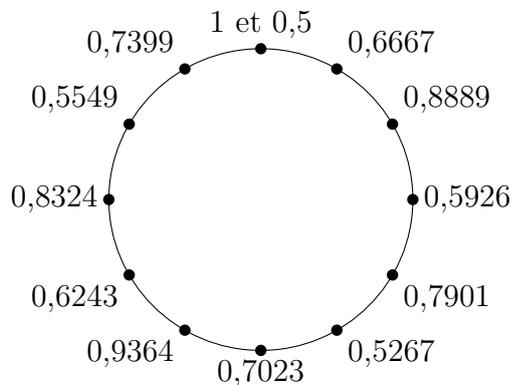
Il faut ensuite remettre les cordées par ordre croissant de longueur.

**Remarque**

Pour trouver toutes les notes facilement, j'ai utilisé le cercle des quintes de la page 205 (mais elles sont indiquées dans la question 5) :



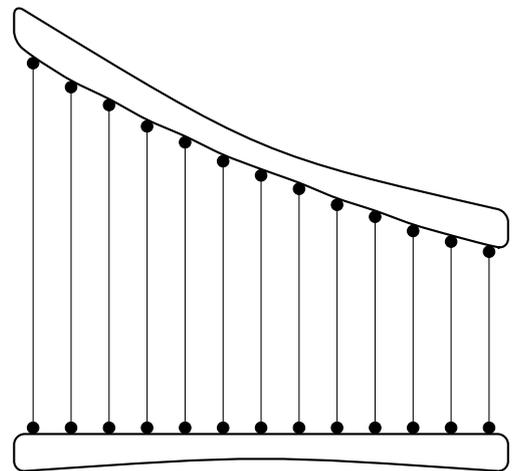
On peut utiliser le cercle pour placer les longueurs des cordes :



5. On place les notes dans l'ordre de la gamme, et l'on constate que les longueurs sont dans l'ordre décroissant :

Corde	Note	Longueur
1	Do	1
2	Do#	0,9364
3	Ré	0,8889
4	Mib	0,8324
5	Mi	0,7901
6	Fa	0,7399
7	Fa#	0,7023
8	Sol	0,6667
9	Sol#	0,6243
10	La	0,5926
11	Sib	0,5549
12	Si	0,5267
13	Do	0,5

Et voilà une jolie harpe, à l'échelle :



**Exercices pour la semaine prochaine : Zone d'échauffement p. 208 + n° 7 p. 211. Bon courage, bon travail !**