Enseignement scientifique chapitre 12
Musique et nombres – Séance 3

Exercice nº 4 p. 210 Un cycle infini ?

1. À partir d'une fréquence f_0, lorsque l'on monte de cinq notes, c'est-à-dire que l'on prend une quinte (étymologie : du latin *quintus*, cinquième), on multiplie la fréquence par 3/2 :

$$\frac{3}{2} \times f_0$$

Exemple

La quinte du Do est le Sol. En effet, les cinq notes sont, dans l'ordre : Do, Ré, Mi, Fa, et Sol, la cinquième note, quinte du Do. On peut ainsi trouver la quinte de n'importe quelle note.

Si l'on applique cet intervalle de 3/2 douze fois, alors on multiplie douze fois la fréquence par 3/2 :

$$\overbrace{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \ldots \times \frac{3}{2}}^{12 \text{ fois}} \times f_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \times f_0$$

On nous parle de la septième octave. Lorsque l'on monte de huit notes, c'est-à-dire que l'on monte d'une octave (étymologiquement, du latin *octavus*, huitième), on multiplie la fréquence par 2 :

$$2 \times f_0$$

Exemple

L'octave d'un Do est à nouveau un Do, puisque l'on monte de huit notes : Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si, et la huitième note, à nouveau un Do. On peut ainsi trouver l'octave de n'importe quelle note.

Si l'on applique cet intervalle de 2 sept fois, alors on multiplie sept fois la fréquence par 2 :

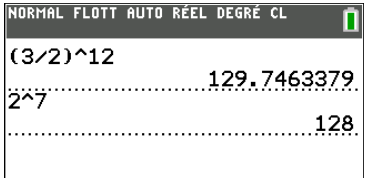
$$\overbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}^{7 \text{ fois}} \times f_0 = (2)^7 \times f_0$$

La phrase en gras indique que les deux intervalles sont différents, ils ne tombent pas sur la même note :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \times f_0 \neq (2)^7 \times f_0$$

Voyons cela numériquement :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129{,}7 \quad \text{et} \quad (2)^7 = 128{,}0$$



Effectivement, les deux notes seront différentes, puisque les intervalles sont différents : $129{,}7 \neq 128$.

2. La n-ième quinte sera égale à la p-ième octave si :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = (2)^p$$

3. Transformons l'expression précédente, en utilisant une propriété des puissances :

$$\frac{3^n}{2^n} = (2)^p$$

Multiplions les deux membres par 2^n et simplifions à gauche :

$$3^n = 2^p \times 2^n$$

Toujours avec les propriétés bien connues des puissances, simplifions le membre de droite :

$$3^n = 2^{n+p}$$

Comme indiqué dans l'énoncé, une puissance de 3 est toujours impaire ; voici les premières valeurs pour $n = 1, 2, 3, \ldots$:

n	1	2	3	4
3^n	3	9	27	81
n	5	6	7	8
3^n	243	729	2187	6561
n	9	10	11	12
3^n	19 683	59 049	177 147	$\boxed{531\,441}$

Une puissance de 2 est quant à elle toujours paire ; voici les premières valeurs pour $n+p = 1, 2, 3, \ldots$:

$n+p$	1	2	3	4
2^{n+p}	2	4	8	16
$n+p$	5	6	7	8
2^{n+p}	32	64	128	256

$n+p$	9	10	11	12
2^{n+p}	512	1024	2048	4096
$n+p$	13	14	15	16
2^{n+p}	8192	16 384	32 768	65 536
$n+p$	17	18	19	20
2^{n+p}	131 072	262 144	$\boxed{524\,288}$	1 048 576

Quelques soient les entiers n et p, il va être impossible d'avoir l'égalité entre les deux membres de l'équation. Tout au plus peut-on trouver quelques combinaisons proches, par exemple, $n = 12$ et $n+p = 19$ (voir les valeurs encadrées), c'est-à-dire justement $p = 7$, la fameuse quinte « du loup ».

Autrement dit, cette équation n'a pas de solution. Le cycle des quintes ne reboucle jamais sur l'octave.

Exercice nº 6 p. 210 Une harpe

1. Si l'on note f la fréquence de la note émise par la première corde, la treizième corde, à l'octave de la première, doit émettre une fréquence avec un intervalle de 2, c'est-à-dire $2 \times f$.

Avec la formule proposée pour la fréquence fondamentale f émise par une corde, on constate que la longueur L de la corde est inversement proportionnelle à f :

$$f = \frac{1}{2\mathrm{L}}\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad f \propto \frac{1}{\mathrm{L}}$$

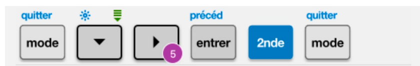
Donc si la fréquence double, la longueur doit être divisée par deux : $\frac{\mathrm{L}}{2}$.

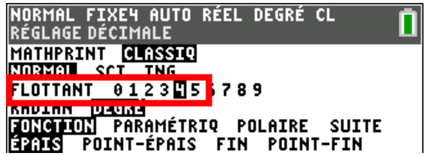
2. Les cordes sont toutes entre une longueur $\frac{\mathrm{L}}{2} = 0{,}5 \times \mathrm{L}$ et $1 \times \mathrm{L}$.

3. Première quinte : L'intervalle pour une quinte est $\frac{3}{2}$: la longueur doit donc être de $\frac{2}{3}$ de la longueur L, donc $\frac{2}{3} \times \mathrm{L} = 0{,}6667 \times \mathrm{L}$. C'est un Sol.

Remarques

Pour tous les calculs, je conserve quatre chiffres après la virgule, avec un arrondi éventuel sur le quatrième chiffre. Réglage de la calculatrice en « Flottant 4 » :





Pour trouver les notes, il suffit de réciter sa gamme dans l'ordre, en comptant cinq notes à chaque fois.

4. Deuxième quinte : $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 2{,}25$, à ramener dans l'octave entre 1 et 2 en divisant par 2 : $2{,}25/2 = 1{,}125$. Et donc une longueur $\mathrm{L}/1{,}125 = 0{,}8889 \times \mathrm{L}$. C'est un Ré.

Remarque

Dans la suite, le nombre de divisions par 2 est trouvé par tâtonnement : diviser autant de fois que nécessaire par 2 à la calculatrice pour obtenir un résultat entre 1 et 2, et compter le nombre de fois, de plus en plus important.

Troisième quinte : $(\frac{3}{2})^3 = 3{,}375$, à diviser par 2 donc $3{,}375/2 = 1{,}6875$. Et donc une longueur $\mathrm{L}/1{,}6875 = 0{,}5926 \times \mathrm{L}$. C'est un La.

Quatrième quinte : $(\frac{3}{2})^4 = 5{,}0625$, à diviser par 2^2 donc $5{,}0625/2^2 = 1{,}2656$. Et donc une longueur $\mathrm{L}/1{,}2656 = 0{,}7901 \times \mathrm{L}$. C'est un Mi.

Cinquième quinte : $(\frac{3}{2})^5 = 7{,}5938$, à diviser par 2^2 donc $7{,}5938/2^2 = 1{,}8984$. Et donc une longueur $\mathrm{L}/1{,}8984 = 0{,}5267 \times \mathrm{L}$. C'est un Si.

Sixième quinte : $(\frac{3}{2})^6 = 11{,}3906$, à diviser par 2^3 donc $11{,}3906/2^3 = 1{,}4238$. Et donc une longueur $\mathrm{L}/1{,}4238 = 0{,}7023 \times \mathrm{L}$. C'est un Fa♯.

Septième quinte : $(\frac{3}{2})^7 = 17{,}0859$, à diviser par 2^4 donc $17{,}0859/2^4 = 1{,}0679$. Et donc une longueur $\mathrm{L}/1{,}4238 = 0{,}9364 \times \mathrm{L}$. C'est un Do♯.

Huitième quinte : $(\frac{3}{2})^8 = 25{,}6289$, à diviser par 2^4 donc $25{,}6289/2^4 = 1{,}6018$. Et donc une longueur $\mathrm{L}/1{,}6018 = 0{,}6243 \times \mathrm{L}$. C'est un Sol♯.

Neuvième quinte : $(\frac{3}{2})^9 = 38{,}4434$, à diviser par 2^5 donc $38{,}4434/2^5 = 1{,}2014$. Et donc une longueur $\mathrm{L}/1{,}2014 = 0{,}8324 \times \mathrm{L}$. C'est un Mi♭.

Dixième quinte : $(\frac{3}{2})^{10} = 57{,}6650$, à diviser par 2^5 donc $57{,}6650/2^5 = 1{,}8020$. Et donc une longueur $\mathrm{L}/1{,}8020 = 0{,}5549 \times \mathrm{L}$. C'est un Si♭.

Onzième quinte : $(\frac{3}{2})^{11} = 86{,}4976$, à diviser par

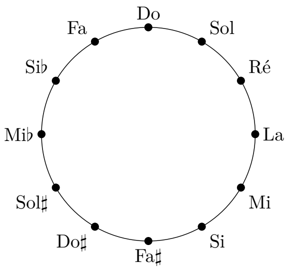
2^6 donc $86{,}4976/2^6 = 1{,}3515$. Et donc une longueur $L/1{,}3515 = 0{,}7399 \times L$. C'est un Fa.

Douzième quinte : C'est la quinte du loup. Il est décidé de garder le facteur 2 exact, et donc $0{,}5 \times L$ pour la longueur de la treizième corde. C'est le Do à l'octave.

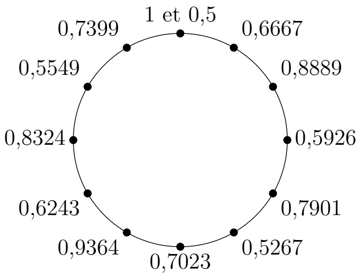
Il faut ensuite remettre les cordées par ordre croissant de longueur.

Remarque

Pour trouver toutes les notes facilement, j'ai utilisé le cercle des quintes de la page 205 (mais elles sont indiquées dans la question **5**) :



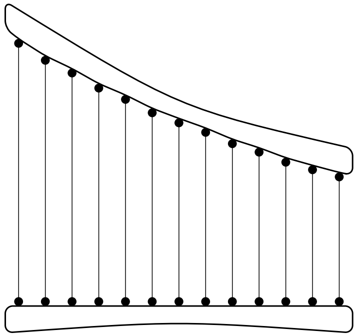
On peut utiliser le cercle pour placer les longueurs des cordes :



5. On place les notes dans l'ordre de la gamme, et l'on constate que les longueurs sont dans l'ordre décroissant :

Corde	Note	Longueur
1	Do	1
2	Do♯	0,9364
3	Ré	0,8889
4	Mi♭	0,8324
5	Mi	0,7901
6	Fa	0,7399
7	Fa♯	0,7023
8	Sol	0,6667
9	Sol♯	0,6243
10	La	0,5926
11	Si♭	0,5549
12	Si	0,5267
13	Do	0,5

Et voilà une jolie harpe, à l'échelle :



✍ **Exercices pour la semaine prochaine : Zone d'échauffement p. 208 + n° 7 p. 211. Bon courage, bon travail !**