Activité n° 2 p. 203 – À la recherche de l'harmonie musicale

Méthode

Soyez sûr d'avoir activement cherché l'activité avant d'étudier la correction ! Les documents de l'activité contiennent des informations précises, ce que l'on ne peut comprendre qu'en les utilisant dans la rédaction des réponses aux questions. Lire simplement les documents ou le corrigé ne suffit pas.

Travaillez sans le corrigé afin de ne pas court-circuiter votre réflexion !

1. Pythagore a eu l'idée de s'intéresser à l'harmonie en musique en remarquant que lorsqu'un forgeron façonne le métal d'une cloche, deux sons distincts sont émis, l'un par le marteau, l'autre par la cloche. Il a remarqué que selon la masse du marteau, cet ensemble de sons peut être agréable à l'oreille, ou au contraire désagréable. Il a alors tenté d'expliquer ces différences.

2. Comme l'indique le document 2, on parle désormais de notes « harmonieuses » ou « consonantes » lorsqu'elles sont agréables à l'oreille, et de notes « dissonantes » dans le cas contraire.

Définition

Deux notes sont harmonieuses si le rapport de leurs fréquences est un **rapport arithmétique simple** : une fraction, c'est-à-dire un rapport de deux nombres entiers : 2/1, 3/2, etc.

Définition

Le rapport de deux fréquences est appelé **intervalle**.

3. D'après le document 3, l'intervalle d'une octave de Do vaut :

$$\frac{f(\text{Do à l'octave})}{f(\text{Do})} = \frac{2}{1} = 2$$

Il s'agit d'un rapport arithmétique simple. L'octave est consonante.

Remarque

Revoyiez la question **5** de l'activité n° 1 p. 202 pour bien comprendre pourquoi il faut écrire le rapport des fréquences.

La quarte montrée au document 3, entre le Do et le Fa, a un intervalle de :

$$\frac{f(\text{Fa})}{f(\text{Do})} = \frac{4}{3}$$

Il s'agit d'un rapport arithmétique simple. La quarte est consonante.

L'intervalle pour une quinte, montrée entre Do et Sol au document 3, n'est pas demandé. Il vaut :

$$\frac{f(\text{Sol})}{f(\text{Do})} = \frac{3}{2}$$

Il s'agit d'un rapport arithmétique simple. La quinte est consonante.

4. D'après la question précédente, pour la quarte et la quinte :

$$\frac{f(\text{Fa})}{f(\text{Do})} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \frac{f(\text{Sol})}{f(\text{Do})} = \frac{3}{2}$$

On cherche l'intervalle entre le Sol et le Fa. Divisons l'intervalle de la quinte de Sol par celui de la quarte de Fa :

$$\frac{\dfrac{f(\text{Sol})}{f(\text{Do})}}{\dfrac{f(\text{Fa})}{f(\text{Do})}} = \frac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{4}{3}}$$

Méthode

Pour simplifier une telle fraction, l'on peut faire le produit des extrêmes et de moyens, comme je l'avais déjà montré en cours :

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Ici on obtient :

$$\frac{f(\text{Sol})}{f(\text{Do})} \times \frac{f(\text{Do})}{f(\text{Fa})} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{4}$$

On peut simplifier à gauche par $f(\text{Do})$ et effectuer les multiplications à droite :

$$\frac{f(\text{Sol})}{f(\text{Fa})} = \frac{9}{8}$$

L'intervalle de fréquences entre le Sol et le Fa est un rapport arithmétique simple : cet intervalle est consonant.

Activité n° 3 p. 204 – Construire les gammes

1. Pour passer d'une colonne à l'autre, on multiplie par $3/2 = 1{,}5$, car on passe d'une note à sa quinte immédiatement supérieure ;

Pour passer d'une ligne à l'autre, on divise par 2, car on souhaite que toutes les notes trouvées soient dans un rapport multiplicatif entre 1 et 2 de la fréquence de la note de base. On dit que l'on ramène les quintes dans l'octave de base.

Quand une seule division par 2 ne suffit pas, à cause de plusieurs multiplications par 1,5, alors on divise par 2 une deuxième fois, une troisième fois si nécessaire, etc. Il s'agit d'une réduction.

2. Tout d'abord, j'espère que vous connaissez les sept notes de la gamme :

Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si,

et en huitième position le Do à l'octave. Ces notes correspondent aux touches blanches du piano.

Mais en réalité, en comptant les touches noires du piano, il y douze notes dans la gamme, avec les *altérations*, qui sont les dièses (♯) et les bémols (♭). Vous n'avez pas à connaître la position des notes sur un piano... donc pour trouver l'ordre des notes, il suffit de procéder par fréquence croissante. Les fréquences des notes ramenées à l'octave sont indiquées en diagonale dans le tableau du document 2 :

Fréquence (Hz)	**Note**
100	Do
107	Do♯
113	Ré
120	Ré♯
127	Mi
135	Fa
142	Fa♯
150	Sol
160	Sol♯
169	La
180	La♯
190	Si
203	Do

Remarque

La fréquence n'augmente pas de façon linéaire : plus on monte dans l'aigu, plus la fréquence augmente vite. Ceci est dû au fait que l'oreille est sensible à l'intervalle entre chaque note, donc au rapport entre les fréquences des deux notes, et pas à une addition de fréquence. Additionner 10 Hz à chaque fois ici ferait une gamme totalement inharmonique et ne servant à rien, parce qu'incapable de reproduire tous les intervalles auxquels l'oreille est sensible. Avec douze notes dans une octave, on arrive à reproduire tous les intervalles intéressants.

3. L'ordre des notes sur le cercle est l'ordre des quintes pures. Sol est la quinte de Do, Ré la quinte de Sol, La la quinte de Ré, et cetera, jusqu'au Fa, dont la quinte donne presque (après réduction) le Do à l'octave.

Dans le tableau, l'ordre est le même, puisque comme on l'a vu d'une colonne à une autre, de gauche à droite, on passe d'une note à sa quinte.

4. Le comma sur le cercle représente l'intervalle entre le Si♯ et le Do à l'octave. Cet intervalle est suffisamment grand pour être perçu par l'oreille : si l'on joue ensemble le Fa et le Si♯, le résultat sera harmonieux, car c'est une quinte ; en revanche, si l'on joue ensemble le Fa et le Do, l'ensemble est dissonant, car il ne s'agit pas d'une quinte pure.

Cette quinte jouée « faux » est la quinte du loup, car la dissonance est très perceptible à l'oreille. Ça « hurle » comme un loup, comme une fausse note au milieu d'un morceau de musique.

La cause de ce problème est mathématique : en multipliant plusieurs fois un nombre par 1,5, puis en le divisant plusieurs fois par 2, on ne peut pas retomber sur une multiplication par 2. Le tableau indique très clairement en tête de colonne qu'il a été procédé à 12 multiplications et à 6 divisions pour obtenir la dernière note ; la fraction ou rapport arithmétique simple vaut (faites ce calcul avec votre calculatrice) :

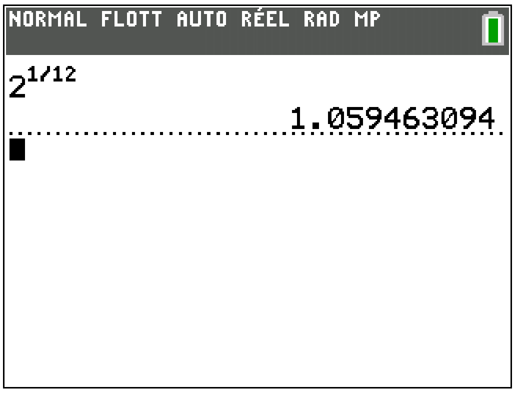
$$\frac{1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1{,}5^{12}}{2^6} \simeq 2{,}03$$

5. Jean-Sébastien Bach propose d'abandonner les quintes pures et les rapports arithmétiques simples pour construire la gamme. Il propose de *tempérer* la gamme, c'est-à-dire d'éviter la quinte du loup en « découpant » une octave en douze intervalles égaux, peu importe si chaque note ne correspond pas à une quinte.

Attention, encore une fois, l'oreille n'est sensible qu'à un rapport de fréquence ; donc, pour découper une octave, un facteur 2 de fréquences, en douze intervalles égaux, il faut que le facteur entre la fréquence de chaque note consécutive soit :

$$\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}} \simeq 1{,}05946$$

Savez-vous calculer une racine douzième à la calculatrice ? Il faut utiliser un exposant $\frac{1}{12}$:



Pour bien voir que « ça fonctionne », je vous recommande le calcul approximatif suivant avec votre calculatrice : multipliez 100 Hz douze fois par 1,05946 :

$$100 \times \overbrace{1{,}05946 \times \ldots \times 1{,}05946}^{\times 12} \simeq 199{,}993 \text{ Hz}$$

Le Do à l'octave va bien mieux « sonner » que le Si♯ à 203 Hz : on évite la quinte du loup.

Remarque

Il ne s'agit pas d'un rapport arithmétique simple, donc les notes ne vont pas « sonner » à la perfection.

6. Pour calculer la fréquence des notes à partir du Do, il faut multiplier par le facteur précédent $\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$, une ou plusieurs fois. J'ai arrondi tous les résultats au hertz :

Do	100 Hz
Do♯	$100 \times 2^{\frac{1}{12}} \simeq 106$ Hz
Ré	$100 \times 2^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{12}} \simeq 112$ Hz
Ré♯	$100 \times 2^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{12}} \simeq 119$ Hz
…	…

En fait, on peut utiliser la formule mathématique $x^a \times x^b = x^{a+b}$ pour simplifier l'écriture :

Do	100 Hz
Do♯	$100 \times 2^{\frac{1}{12}} \simeq 106$ Hz
Ré	$100 \times 2^{\frac{2}{12}} \simeq 112$ Hz
Ré♯	$100 \times 2^{\frac{3}{12}} \simeq 119$ Hz
Mi	$100 \times 2^{\frac{4}{12}} \simeq 126$ Hz
Fa	$100 \times 2^{\frac{5}{12}} \simeq 133$ Hz
Fa♯	$100 \times 2^{\frac{6}{12}} \simeq 141$ Hz
Sol	$100 \times 2^{\frac{7}{12}} \simeq 150$ Hz
Sol♯	$100 \times 2^{\frac{8}{12}} \simeq 159$ Hz
La	$100 \times 2^{\frac{9}{12}} \simeq 168$ Hz
La♯	$100 \times 2^{\frac{10}{12}} \simeq 178$ Hz
Si	$100 \times 2^{\frac{11}{12}} \simeq 189$ Hz
Do	$100 \times 2^{\frac{12}{12}} \simeq 200$ Hz

Soyez sûr d'avoir mené ces calculs à votre calculatrice, car c'est ce qui est demandé en épreuve d'E3C !

On peut maintenant comparer la fréquence dans chacune des gammes :

Note	f_P **(Hz)** gamme de Pythagore	f_t **(Hz)** gamme tempérée
Do	100	100
Do♯	107	106
Ré	113	112
Ré♯	120	119
Mi	127	126
Fa	135	133
Fa♯	142	141
Sol	150	150
Sol♯	160	159
La	169	168
La♯	180	178
Si	190	189
Do	203	200

On constate dans ce tableau que les intervalles entre les fréquences sont minimes : les notes sont proches, sans être égales, sauf justement pour le fameux Do à l'octave. Aucune quinte n'est juste dans la gamme tempérée, mais à l'oreille, cela s'entend peu. Il s'agit d'un compromis.

7. L'harmonie repose sur les nombres rationnels ; la gamme tempérée sur les nombres irrationnels. Toute la musique que l'on écoute repose sur des principes mathématiques.

Remarque

Jean-Sébastien BACH était un compositeur de génie, un pianiste virtuose et novateur (il est l'un des premiers à jouer sur le fameux *piano-forte*, qui va supplanter le clavecin), un pédagogue de génie (voyez les *Petits livres de notes d'Anna Magdalena BACH*, écrits par BACH pour sa famille, pour l'apprentissage du piano, et qui reste la meilleure des méthodes !), et aussi un mathématicien ! L'auriez-vous supposé ?

2 La construction des gammes (cours)

Compétences

Voici les compétences que vous devez maîtriser à l'issue de ce cours :

- La gamme de Pythagore, basée sur l'harmonie, est dite naturelle, car elle est juste ;
- La gamme tempérée est une altération de la gamme naturelle, pour éviter d'avoir à raccourcir une quinte ;
- L'intervalle entre deux notes de la gamme tempérée est $\sqrt[12]{2}$;
- Vous devez savoir calculer la fréquence de n'importe quelle note, étant connu le nombre d'intervalle qui la sépare d'une note de référence : $f_n = 2^{\frac{n}{12}} \times f_0$.

La construction de la gamme naturelle

- Pour écrire une musique agréable à l'oreille, on a besoin d'un ensemble de notes qui peuvent s'harmoniser : une gamme. C'est une suite finie de notes réparties sur une octave.
- La .... ou gamme de PYTHAGORE est une suite de notes « sautant » de quinte en quinte (pas des quintes de toux Lol !). Si la nouvelle note n'est plus dans l'octave de la gamme, on la ramène dedans en divisant sa fréquence par 2, ou 4, etc.
- Après un cycle de .... quintes, la fréquence de la note obtenue est très proche de l'octave, mais ne retombe pas exactement dessus. Pour retomber sur l'octave, il faut « raccourcir » la dernière quinte du cycle. Comme son rapport de fréquences ne vaut plus exactement 3/2, elle sonne faux.

La gamme tempérée, un compromis nécessaire

- Pour régler le problème de la dernière quinte fausse, on peut utiliser la gamme tempérée, qui consiste à diviser une octave en .... égaux de rapport r.
- La fréquence f_{n-1} de la (n-1)-ième note doit être multipliée par le facteur r pour donner la fréquence f_n de la n-ième note :

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = r$$

- Si l'on considère l'octave de f_0, donc s'étendant de f_0 jusqu'à $2 \times f_0$, la douzième note est égale à l'octave si :

$$f_{12} = 2 \times f_0$$

- Puisque l'on compte douze intervalles entre f_0 et f_{12}, alors :

$$\frac{f_{12}}{f_0} = r^{12} \quad \Rightarrow \quad f_{12} = r^{12} \times f_0$$

- Au final, il faut avoir $r^{12} = 2$ donc :

$$r = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$$

Définition

....

....

....

✍ **Exercices n° 2, 3 et 5 p. 209 et 210 (le n° 3 avait été donné « trop tôt » !).**

Correction de l'exercice donné en séance 12-1

N° 1 p. 209 – Des notes à l'octave

1. Intervalle entre les deux notes (faites toujours la grande fréquence divisée par la petite) :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{880}{440} = 2$$

Les deux notes ne sont pas identiques. Un intervalle de 2 signifie que les deux notes sont à l'octave.

2. Une octave est l'intervalle entre deux notes qui vaut 2. Les notes ont alors l'air de se ressembler, et elles sont harmonieuses (elles « sonnent » bien ensemble à l'oreille). Elles portent le même nom.

3. Deux sons dont les fréquences sont dans le rapport 2/1 correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes. Amira a donc eu l'impression que Pablo et Timothée jouaient la même note.

Remarque

Il s'agit dans les trois questions de la même explication, répétée trois fois ; dès que vous commencez à répéter les mêmes explications, cela signifie que vous êtes sur la bonne voie et commencez à avoir fait le tour du problème.

Correction des exercices donnés en séance 11-2

n° 2 p. 195 – Le réflexe stapédien

1. Sur l'échelle page 193, on lit $I = 10^{-4}$ W/m^2 pour l'intensité sonore correspondant à $L = 80$ dB.

2. La formule permettant le calcul de l'intensité sonore I en fonction du niveau sonore L est :

$$I = I_0 \times 10^{\frac{L}{10}}$$

La valeur I_0 de l'intensité minimale perçue est toujours donnée : $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Application numérique :

$$I = 10^{-12} \times 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

Il y a bien accord parfait.

n° 3 p. 195 – Une corde de piano

1. Si l'on augmente la longueur ℓ de la corde, la fréquence f du fondamental diminue : le son produit est plus grave.

2. Isolons le coefficient a dans l'expression donnée par l'énoncé :

$$f = \frac{a}{\ell} \quad \Leftrightarrow \quad a = f \times \ell$$

Application numérique, sans omettre de convertir la longueur en mètre :

$$a = 440 \times 0{,}85 = 374 \text{ Hz} \cdot \text{m}$$

L'unité de a est le hertz multiplié par le mètre.

n° 5 p. 195 – Le hurlement du coyote

1. La surface S d'une sphère de rayon R est donnée par la formule : $S = 4\pi R^2$.

2. À une certaine distance d, l'intensité sonore émise par le coyote est égale à la puissance P émise, divisée par la surface S de la sphère centrée sur la source d'émission, ici le coyote :

$$I = \frac{P}{S}$$

Si l'on note d la distance parcourue par le son, ou rayon de la sphère, $S = 4\pi d^2$ et donc :

$$I = \frac{P}{4\pi d^2}$$

3. Le niveau sonore L s'exprime en fonction de l'intensité sonore I par la formule :

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \Rightarrow \quad L = 10 \log\left(\frac{P}{4\pi d^2 I_0}\right)$$

4. À 10 m :

$$L = 10 \times \log\left(\frac{10^{-2}}{4 \times \pi \times 10^2 \times 10^{-12}}\right) = 69 \text{ dB}$$

Avec le même calcul, on trouve $L = 49$ dB à 100 m et $L = 29$ dB à 1 km = 1000 m.