Activité n° 3 p. 204 – Construire les gammes

Lien vers l'énoncé : `LLS.fr/ES1P204`

1. Pour passer d'une colonne à l'autre, on multiplie par $3/2 = 1{,}5$, car on passe d'une note à sa quinte immédiatement supérieure ;

Pour passer d'une ligne à l'autre, on divise par 2, car on souhaite que toutes les notes trouvées soient dans un rapport multiplicatif entre 1 et 2 de la fréquence de la note de base. On dit que l'on ramène les quintes dans l'octave de base.

Quand une seule division par 2 ne suffit pas, à cause de plusieurs multiplications par 1,5, alors on divise par 2 une deuxième fois, une troisième fois si nécessaire, etc. Il s'agit d'une réduction.

2. Tout d'abord, j'espère que vous connaissez les sept notes de la gamme :

Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si,

et en huitième position le Do à l'octave. Ces notes correspondent aux touches blanches du piano.

Mais en réalité, en comptant les touches noires du piano, il y douze notes dans la gamme, avec les *altérations*, qui sont les dièses (♯) et les bémols (♭). Vous n'avez pas à connaître la position des notes sur un piano... donc pour trouver l'ordre des notes, il suffit de procéder par fréquence croissante. Les fréquences des notes ramenées à l'octave sont indiquées en diagonale dans le tableau du document 2 :

Fréquence (Hz)	Note
100	Do
107	Do♯
113	Ré
120	Ré♯
127	Mi
135	Fa
142	Fa♯
150	Sol
160	Sol♯
169	La
180	La♯
190	Si
203	Do

Remarque

La fréquence n'augmente pas de façon linéaire : plus on monte dans l'aigu, plus la fréquence augmente vite. Ceci est dû au fait que l'oreille est sensible à l'intervalle entre chaque note, donc au rapport entre les fréquences des deux notes, et pas à une addition de fréquence. Additionner 10 Hz à chaque fois ici ferait une gamme totalement inharmonique et ne servant à rien, parce qu'incapable de reproduire tous les intervalles auxquels l'oreille est sensible. Avec douze notes dans une octave, on arrive à reproduire tous les intervalles intéressants.

3. L'ordre des notes sur le cercle est l'ordre des quintes pures. Sol est la quinte de Do, Ré la quinte de Sol, La la quinte de Ré, et cetera, jusqu'au Fa, dont la quinte donne presque (après réduction) le Do à l'octave.

Dans le tableau, l'ordre est le même, puisque comme on l'a vu d'une colonne à une autre, de gauche à droite, on passe d'une note à sa quinte.

4. Le comma sur le cercle représente l'intervalle entre le Si♯ et le Do à l'octave. Cet intervalle est suffisamment grand pour être perçu par l'oreille : si l'on joue ensemble le Fa et le Si♯, le résultat sera harmonieux, car c'est une quinte ; en revanche, si l'on joue ensemble le Fa et le Do, l'ensemble est dissonant, car il ne s'agit pas d'une quinte pure.

Cette quinte jouée « faux » est la quinte du loup, car la dissonance est très perceptible à l'oreille. Ça « hurle » comme un loup, comme une fausse note au milieu d'un morceau de musique.

La cause de ce problème est mathématique : en multipliant plusieurs fois un nombre par 1,5, puis en le divisant plusieurs fois par 2, on ne peut pas retomber sur une multiplication par 2. Le tableau indique très clairement en tête de colonne qu'il a été procédé à 12 multiplications et à 6 divisions pour obtenir la dernière note ; la fraction ou rapport arithmétique simple vaut (faites ce calcul avec votre calculatrice) :

$$\frac{1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5 \times 1{,}5}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1{,}5^{12}}{2^6} \simeq 2{,}03$$

5. Jean-Sébastien Bach propose d'abandonner les quintes pures et les rapports arithmétiques simples pour construire la gamme. Il propose de *tempérer* la gamme, c'est-à-dire d'éviter la quinte du loup en « découpant » une octave en douze intervalles égaux, peu importe si chaque note ne correspond pas à une quinte.

Attention, encore une fois, l'oreille n'est sensible qu'à un rapport de fréquence ; donc, pour découper une octave, un facteur 2 de fréquences, en douze intervalles égaux, il faut que le facteur entre la fréquence de chaque note consécutive soit :

$$\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}} \simeq 1{,}05946$$

Savez-vous calculer une racine douzième à la calculatrice ? Il faut utiliser un exposant $\frac{1}{12}$:

Pour bien voir que « ça fonctionne », je vous recommande le calcul approximatif suivant avec votre calculatrice : multipliez 100 Hz douze fois par 1,05946 :

$$100 \times \overbrace{1{,}05946 \times \ldots \times 1{,}05946}^{\times 12} \simeq 199{,}993 \text{ Hz}$$

Le Do à l'octave va bien mieux « sonner » que le Si♯ à 203 Hz : on évite la quinte du loup.

Remarque

Il ne s'agit pas d'un rapport arithmétique simple, donc les notes ne vont pas « sonner » à la perfection.

6. Pour calculer la fréquence des notes à partir du Do, il faut multiplier par le facteur précédent $\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}}$, une ou plusieurs fois. J'ai arrondi tous les résultats au hertz :

Do	100 Hz
Do♯	$100 \times 2^{\frac{1}{12}} \simeq 106$ Hz
Ré	$100 \times 2^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{12}} \simeq 112$ Hz
Ré♯	$100 \times 2^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{12}} \simeq 119$ Hz
…	…

En fait, on peut utiliser la formule mathématique $x^a \times x^b = x^{a+b}$ pour simplifier l'écriture :

Do	100 Hz
Do♯	$100 \times 2^{\frac{1}{12}} \simeq 106$ Hz
Ré	$100 \times 2^{\frac{2}{12}} \simeq 112$ Hz
Ré♯	$100 \times 2^{\frac{3}{12}} \simeq 119$ Hz
Mi	$100 \times 2^{\frac{4}{12}} \simeq 126$ Hz
Fa	$100 \times 2^{\frac{5}{12}} \simeq 133$ Hz
Fa♯	$100 \times 2^{\frac{6}{12}} \simeq 141$ Hz
Sol	$100 \times 2^{\frac{7}{12}} \simeq 150$ Hz
Sol♯	$100 \times 2^{\frac{8}{12}} \simeq 159$ Hz
La	$100 \times 2^{\frac{9}{12}} \simeq 168$ Hz
La♯	$100 \times 2^{\frac{10}{12}} \simeq 178$ Hz
Si	$100 \times 2^{\frac{11}{12}} \simeq 189$ Hz
Do	$100 \times 2^{\frac{12}{12}} \simeq 200$ Hz

Soyez sûr d'avoir mené ces calculs à votre calculatrice, car c'est ce qui est demandé en épreuve de Bac (les années sans toux persistante !)

On peut maintenant comparer la fréquence dans chacune des gammes :

Note	f_{P} **(Hz)** gamme de Pythagore	f_{t} **(Hz)** gamme tempérée
Do	100	100
Do♯	107	106
Ré	113	112
Ré♯	120	119
Mi	127	126
Fa	135	133
Fa♯	142	141
Sol	150	150
Sol♯	160	159
La	169	168
La♯	180	178
Si	190	189
Do	203	200

On constate dans ce tableau que les intervalles entre les fréquences sont minimes : les notes sont proches, sans être égales, sauf justement pour le fameux Do à l'octave. Aucune quinte n'est juste dans la gamme tempérée, mais à l'oreille, cela s'entend peu. Il s'agit d'un compromis.

7. L'harmonie repose sur les nombres rationnels ; la gamme tempérée sur les nombres irrationnels. Toute la musique que l'on écoute repose sur des principes mathématiques.

Remarque

Jean-Sébastien BACH était un compositeur de génie, un pianiste virtuose et novateur (il est l'un des premiers à jouer sur le fameux *piano-forte*, qui va supplanter le clavecin), un pédagogue de génie (voyez les *Petits livres de notes d'Anna Magdalena* BACH, écrits par BACH pour sa famille, pour l'apprentissage du piano, et qui reste la meilleure des méthodes !), et aussi un mathématicien ! L'auriez-vous supposé ?

Correction des exercices donnés en séance hors-série 1

Lien permanent vers les énoncés : `LLS.fr/ES1P209`

Nº 2 p. 209 – Ton et demi-ton

1. Les notes qui ne sont séparées que d'un apotome sont celles qui sont séparées par un intervalle 2187/2048. Ce sont donc :
- Do et Do♯ ;
- Mi♭ et Mi ;
- Fa et Fa♯ ;
- Sol et Sol♯ ;
- Si♭ et Si.

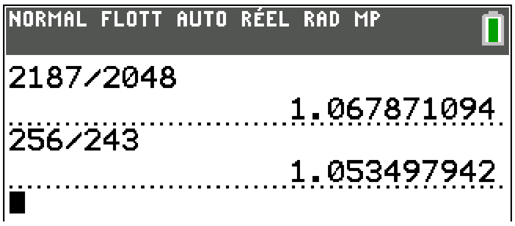
L'apotome est l'intervalle qui sépare une note de la même note « altérée » par un dièse (symbole ♯) ou par un « bémol » (symbole ♭).

L'intervalle séparant deux notes différentes est un limma, intervalle qui vaut 256/243 :
- Do♯ et Ré ;
- Ré et Mi♭ ;
- Mi et Fa ;
- Fa♯ et Sol ;
- Sol♯ et La ;
- La et Si♭ ;
- Si et Do.

Le limma est l'intervalle qui sépare deux notes différentes, éventuellement altérées.

Il est intéressant de calculer numériquement la valeur d'un apotome et d'un limma :

$$\frac{2187}{2048} \simeq 1{,}0679 \quad \text{et} \quad \frac{256}{243} \simeq 1{,}0535$$



Ces deux valeurs sont légèrement différentes.

Le fait qu'un limma soit différent d'un apotome fait que les douze notes de la gamme ne sont pas séparées par un intervalle constant. Une telle différence d'intervalle est peu audible à l'oreille, et a comme avantage d'avoir onze quintes justes (et hélas une douzième quinte fausse, la fameuse *quinte du loup*).

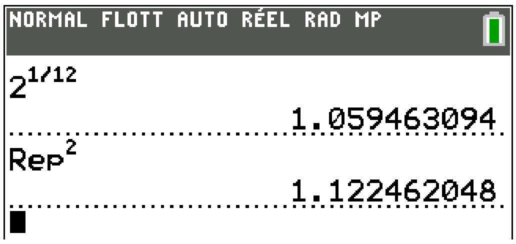
2. Dans la gamme tempérée, comme vu dans le cours de la séance hors-série 1, chaque demi-ton correspond à un intervalle égal à la racine douzième de deux :

$$\sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}} \simeq 1{,}0595$$

On constate que cette valeur est intercalée entre le limma et l'apotome. C'est un compromis entre les deux, d'où le nom « tempéré » donné à cette gamme : ni trop chaud, ni trop froid !

Et chaque ton correspond à deux demi-tons, donc un intervalle égal à la racine douzième au carré. C'est-à-dire que l'on multiplie deux fois par l'intervalle d'un demi-ton pour obtenir l'intervalle d'un ton :

$$\overbrace{\sqrt[12]{2} \times \sqrt[12]{2}}^{2 \text{ fois}} = 2^{\frac{1}{12}} \times 2^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{2}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} \simeq 1{,}1225$$



Nº 3 p. 209 – La quinte

1. La quinte d'une note à 100 Hz a, par définition de la quinte, une fréquence multipliée par l'intervalle de 3/2 :

$$100 \times \frac{3}{2} = 150 \text{ Hz}$$

2. L'octave d'une note à 100 Hz a, par définition de l'octave, une fréquence multipliée par 2 :

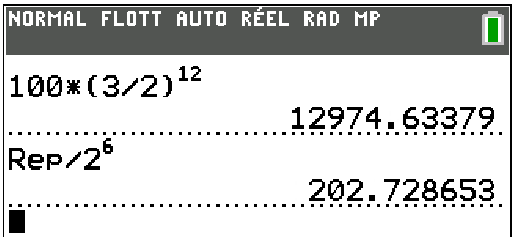
$$100 \times 2 = 200 \text{ Hz}$$

3. Si l'on prend douze fois la quinte de 100 Hz, on multiplie douze fois par 3/2 :

$$100\times \overbrace{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{3}{2}}^{12 \text{ fois}} = 100\times\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \simeq 12\,975 \text{ Hz}$$

On remarque que l'on ne se trouve plus dans l'octave, entre 100 Hz et 200 Hz : il faut réduire la note à l'octave, sans changer de note, c'est-à-dire en divisant par deux suffisamment de fois pour se retrouver entre 100 et 200 Hz. Si vous vous souvenez de l'activité vue en séance 12.2, vous savez qu'il faut diviser six fois par deux :

$$\frac{12975}{\underbrace{2\times 2\times\ldots\times 2}_{6 \text{ fois}}} = 203 \text{ Hz}$$



On remarque alors que l'on ne retombe pas exactement sur l'octave à 200 Hz : en multipliant par 3/2 et en divisant par 2 autant de fois que nécessaire, on ne peut pas reproduire le facteur 2 exact nécessaire pour obtenir une octave qui sonne juste. Il s'agit du fameux problème de la douzième quinte qui sonne faux, ou *quinte du loup*.

Nº 4 p. 210 – Un cycle infini ?

1. À partir d'une fréquence f_0, lorsque l'on monte de cinq notes, c'est-à-dire que l'on prend une quinte (étymologie : du latin *quintus*, cinquième), on multiplie la fréquence par 3/2 :

$$\frac{3}{2}\times f_0$$

Exemple

La quinte du Do est le Sol. En effet, les cinq notes sont, dans l'ordre : Do, Ré, Mi, Fa, et Sol, la cinquième note, quinte du Do. On peut ainsi trouver la quinte de n'importe quelle note.

Si l'on applique cet intervalle de 3/2 douze fois, alors on multiplie douze fois la fréquence par 3/2 :

$$\overbrace{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{3}{2}}^{12 \text{ fois}}\times f_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{12}\times f_0$$

On nous parle de la septième octave. Lorsque l'on monte de huit notes, c'est-à-dire que l'on monte d'une octave (étymologiquement, du latin *octavus*, huitième), on multiplie la fréquence par 2 :

$$2\times f_0$$

Exemple

L'octave d'un Do est à nouveau un Do, puisque l'on monte de huit notes : Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si, et la huitième note, à nouveau un Do. On peut ainsi trouver l'octave de n'importe quelle note.

Si l'on applique cet intervalle de 2 sept fois, alors on multiplie sept fois la fréquence par 2 :

$$\overbrace{2\times 2\times\ldots\times 2}^{7 \text{ fois}}\times f_0 = (2)^7\times f_0$$

La phrase en gras indique que les deux intervalles sont différents, ils ne tombent pas sur la même note :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12}\times f_0 \neq (2)^7\times f_0$$

Voyons cela numériquement :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129{,}7 \quad \text{et} \quad (2)^7 = 128{,}0$$

Effectivement, les deux notes seront différentes, puisque les intervalles sont différents : $129{,}7 \neq 128$.

2. La n-ième quinte sera égale à la p-ième octave si :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n = (2)^p$$

3. Transformons l'expression précédente, en utilisant une propriété des puissances :

$$\frac{3^n}{2^n} = (2)^p$$

Multiplions les deux membres par 2^n et simplifions à gauche :

$$3^n = 2^p\times 2^n$$

Toujours avec les propriétés bien connues des puissances, simplifions le membre de droite :

$$3^n = 2^{n+p}$$

Comme indiqué dans l'énoncé, une puissance de 3 est toujours impaire ; voici les premières valeurs pour $n = 1, 2, 3, \ldots$:

n	1	2	3	4
3^n	3	9	27	81
n	5	6	7	8
3^n	243	729	2187	6561
n	9	10	11	12
3^n	19 683	59 049	177 147	$\boxed{531\,441}$

Une puissance de 2 est quant à elle toujours paire ; voici les premières valeurs pour $n + p = 1, 2, 3, ...$:

$n+p$	1	2	3	4
2^{n+p}	2	4	8	16
$n+p$	5	6	7	8
2^{n+p}	32	64	128	256
$n+p$	9	10	11	12
2^{n+p}	512	1024	2048	4096
$n+p$	13	14	15	16
2^{n+p}	8192	16 384	32 768	65 536
$n+p$	17	18	19	20
2^{n+p}	131 072	262 144	$\boxed{524\,288}$	1 048 576

Quelques soient les entiers n et p, il va être impossible d'avoir l'égalité entre les deux membres de l'équation. Tout au plus peut-on trouver quelques combinaisons proches, par exemple, $n = 12$ et $n + p = 19$ (voir les valeurs encadrées), c'est-à-dire justement $p = 7$, la fameuse quinte « du loup ».

Autrement dit, cette équation n'a pas de solution. Le cycle des quintes ne reboucle jamais sur l'octave.

N° 5 p. 210 – La gamme de Zarlino

1. Comme indiqué dans le texte, l'intervalle entre deux notes à la tierce est 5/4 :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{5}{4}$$

L'intervalle entre deux notes à la quinte est 3/2 :

$$\frac{f_3}{f_1} = \frac{3}{2}$$

Donc l'intervalle entre la note 2 à la tierce et la note 3 à la quinte est :

$$\frac{\frac{f_2}{f_1}}{\frac{f_3}{f_1}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}}$$

On simplifie à gauche par f_1 et à droite, on effectue le produit des extrêmes et de moyens, et l'on simplifie la fraction :

$$\frac{f_2}{f_3} = \frac{5 \times 2}{4 \times 3} = \frac{5}{6}$$

2. Construisons les notes du premier accord parfait majeur Do-Mi-Sol, en multipliant par 5/4 et 3/2. On note f_Z la fréquence obtenue dans la gamme de Zarlino :

$$\begin{cases} f_Z(\text{Mi}) = 100 \times \frac{5}{4} = 125 \text{ Hz} \\ f_Z(\text{Sol}) = 100 \times \frac{3}{2} = 150 \text{ Hz} \end{cases}$$

Le deuxième accord majeur Sol-Si-Ré part de 150 Hz et se construit de la même manière, tierce d'abord, puis quinte :

$$\begin{cases} f_Z(\text{Si}) = 150 \times \frac{5}{4} = 187{,}5 \text{ Hz} \\ f_Z(\text{Ré}) = 150 \times \frac{3}{2} = 225 \text{ Hz} \end{cases}$$

On constate que le Ré n'est plus dans l'octave, en divisant sa fréquence par deux on obtient la fréquence du Ré une octave plus bas :

$$f_Z(\text{Ré}) = \frac{225}{2} = 112{,}5 \text{ Hz}$$

Il ne reste plus que l'accord majeur renversé Fa-La-Do. Le Fa est la note dont la quinte est le Do à l'octave, donc :

$$f_Z(\text{Fa}) = \frac{200}{\frac{3}{2}} = 133{,}3 \text{ Hz}$$

et le La est la tierce du Fa :

$$f_Z(\text{La}) = 133{,}3 \times \frac{5}{4} = 166{,}7 \text{ Hz}$$

3. Les fréquences des notes dans la gamme de Zarlino, sans être exactement les mêmes que dans la gamme de Pythagore, restent proches.

Note	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si
f_P (Hz)	100	113	127	135	150	169	190
f_Z (Hz)	100	113	125	133	150	168	188

Pour comparer les notes des deux gammes, il faut calculer les intervalles entre chaque note. On obtient des fractions, le *comma*, un intervalle très petit, généralement entre le dixième et le cinquième du ton.